Università del Salento
Dipartimento di Matematica e Fisica
“E. De Giorgi”

Raffaele Vitolo
email: raffaele.vitolo@unisalento.it
web: http://poincare.unisalento.it/vitolo

Complementi di
Meccanica Razionale

Versione del 7 marzo 2024

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

INDICE

CAPITOLO 1

VETTORI DELLO SPAZIO ORDINARIO

Il concetto di vettore applicato in un punto è già noto dalla Fisica. Qui vogliamo introdurre il concetto di vettore libero, che ha suggerito la generalizzazione a spazi vettoriali astratti.

1.1 Definizioni

1.1.a Spazio $\mathbf{V}_3$

Si consideri lo spazio ordinario della geometria euclidea. Ogni segmento di estremi A e B individua due segmenti orientati AB e BA aventi orientazioni opposte; ciò è espresso scrivendo che

$$AB = -BA \quad \text{oppure} \quad \vec{AB} = -\vec{BA}.$$

Nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio introduciamo la seguente relazione di equivalenza, detta di *equipollenza* (cioè di uguale valore ed efficacia)

$$AB \sim CD \quad \Leftrightarrow \quad \text{i punti medi di } AD,\ BC \text{ coincidono.}$$

Segue che AB è parallelo a CD (che si denota $AB \parallel CD$) e $\|AB\| = \|CD\|$, dove $\|AB\|$ indica il *modulo* o *lunghezza* del segmento AB. Le classi di equivalenza si chiamano *vettori* (liberi). Il vettore $\vec{u}$ individuato da $\vec{AB}$ e da tutti quelli ad esso equipollenti (come $\vec{CD}$) soddisfa l'uguaglianza $\vec{u} = [\vec{AB}] = [\vec{CD}]$. Il rappresentante $\vec{AB}$ di un vettore $\vec{u}$ si dice *vettore $\vec{u}$ applicato in A* e si indica $(\vec{u}, A)$. Il vettore $\vec{u}$ determina una traslazione dello spazio, da cui la parola, che proviene dal latino *vehere* = trasportare.

$$A + \vec{u} = B \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = B - A = \vec{AB}.$$

La notazione $\vec{u} = B - A$, molto felice, è di W. R. Hamilton (1805–1865), il primo che ha dato il concetto preciso di vettore.

I segmenti AA, BB, ..., individuano il vettore nullo $\vec{0}$.

Un vettore non nullo è individuato dalla direzione, dal verso e dal modulo. Indichiamo con $\mathbf{V}_3$ l'insieme dei vettori liberi dello spazio e con $\mathbf{S}_3$ i punti dello spazio. Fissato un punto $O \in \mathbf{S}_3$, ad ogni punto $P \in \mathbf{S}_3$ si può associare un unico vettore $\vec{u} \in \mathbf{V}_3$, ponendo $\vec{u} = \vec{OP}$.

1.1.b Somma di vettori

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori, che vogliamo sommare. Se si considerano i rappresentanti indicati $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - B$, poniamo

$$\vec{u} + \vec{v} = C - A$$

(che non dipende dai rappresentanti scelti). Si vede facilmente che $(\mathbf{V}_3, +)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro $\vec{0}$ e $-\vec{u} = A - B$ se $\vec{u} = B - A$.

Si osservi che se consideriamo rappresentanti opportuni $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AD}$, allora $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ è la diagonale del parallelogramma di lati AB e AD, in accordo con quanto si studia in Fisica.

1.1.c Differenza di vettori

Per definizione poniamo

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Se $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - A$, allora $\vec{u} - \vec{v} = B - C$.

1.1.d Prodotto di un numero reale per un vettore

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbf{V_3}$. Vogliamo definire $\lambda\vec{u}$.

1. Se $\lambda = 0$, oppure $\vec{u} = \vec{0}$, poniamo $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.
2. Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, il vettore $\lambda\vec{u}$ ha direzione coincidente con $\vec{u}$, verso concorde con quello di $\vec{u}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$, e inoltre

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto *scalare*.

Valgono le seguenti proprietà immediate

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}, \qquad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u},$$
$$(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}, \qquad 1\,\vec{u} = \vec{u}$$
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

1.2 Dipendenza ed indipendenza lineare

1.2.a Dipendenza lineare

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente dipendenti* se e solo se esiste una n-pla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tale che

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Infatti se $\lambda_n \neq 0$,
$$\vec{v}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\vec{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\vec{v}_{n-1},$$
cioè $\vec{v}_n$ 'dipende' da $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$. Più precisamente, si dice che $\vec{v}_n$ è combinazione lineare di $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$. In generale, si dice che un vettore $\vec{v}$ è *combinazione lineare* di $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ se
$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n\,. \tag{1.2.1}$$

1.2.b Indipendenza lineare

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente indipendenti* se e solo se *non* sono linearmente dipendenti, cioè
$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$
Chiaramente vale sempre (sia nel caso dell'indipendenza, sia nel caso della dipendenza)
$$\lambda_i = 0 \text{ per ogni } i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}\,.$$

1.2.c Significato geometrico

Siano $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{V}_3$. Allora
$$\begin{aligned} \vec{v} \text{ dipendente} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ dipendenti} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ dipendenti} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ complanari.} \end{aligned}$$

(I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono detti complanari se i loro rappresentanti applicati in uno stesso punto appartengono ad un piani)

Quindi, se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sono indipendenti essi sono non complanari e possono considerarsi come vettori di un sistema di riferimento dello spazio. Ne segue che $n \geq 4$ vettori di $\mathbf{V}_3$ sono sempre dipendenti, quindi in $\mathbf{V}_3$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 3.

Sia $\mathbf{V}_2$ l'insieme dei vettori del piano; in $\mathbf{V}_2$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 2.

Sia $\mathbf{V}_1$ l'insieme dei vettori della retta; in $\mathbf{V}_1$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 1.

Si dice anche che la *dimensione* della retta è 1 ed una sua *base* è data da un vettore non nullo $\{\vec{e}_1\}$; la *dimensione* del piano è 2 ed una sua *base* è data da 2 vettori indipendenti $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$; la *dimensione* dello spazio è 3 ed una sua *base* è data da 3 vettori indipendenti $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di $\mathbf{V}_3$. Allora $\{\vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sono dipendenti e
$$\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3.$$

La terna di numeri $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ è univocamente individuata, e λ_1, λ_2, λ_3 sono dette le *coordinate* di $\vec{v}$ nella base $\mathcal{B}$. Naturalmente, nella base $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 & \text{ha coordinate} & (1,0,0), \\ \vec{e}_2 & \text{ha coordinate} & (0,1,0), \\ \vec{e}_3 & \text{ha coordinate} & (0,0,1). \end{array}$$

Vediamo ora come condizioni vettoriali si traducano in problemi scalari tramite le coordinate. Siano

$$\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \qquad \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \qquad \vec{w}(w_1, w_2, w_3),$$

o, col simbolismo matriciale,

$$\vec{u} = (u_1\ u_2\ u_3)^T, \quad \vec{v} = (v_1\ v_2\ v_3)^T, \quad \vec{w} = (w_1\ w_2\ w_3)^T.$$

Naturalmente $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$, $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Allora:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} au_1 + bv_1 + cw_1 = 0 \\ au_2 + bv_2 + cw_2 = 0 \\ au_3 + bv_3 + cw_3 = 0. \end{cases}$$

Si consideri

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Se $\operatorname{rg}(A) = p$, allora si vede facilmente che p è il massimo numero di vettori indipendenti in $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, come si vede facilmente tenendo conto della risoluzione dei sistemi lineari (omogenei). Se consideriamo n vettori, la matrice A avrà 3 righe ed n colonne, quindi ancora $\operatorname{rg}(A) \leq 3$.

Se consideriamo il riferimento cartesiano (detto *affine*) $\mathcal{R}(Oxyz)$ associato a $\mathcal{B}$ tale che $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ siano i vettori unità sugli assi (applicati in O) si ha, con l'usuale simbolismo (usato per esempio in Fisica)

$$\vec{e}_1 = \vec{\imath}, \quad \vec{e}_2 = \vec{\jmath}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k},$$
$$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_y, \quad u_3 = u_z.$$

Tenendo conto della corrispondenza tra $\mathbf{V}_3$ e $\mathbf{S}_3$ indicata in (2.1), le *coordinate* (x, y, z) del punto P sono le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ nella base $\mathcal{B}$, cioè

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Se $P_i(x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2$, allora

$$P_1\vec{P}_2 = O\vec{P}_2 - O\vec{P}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

È chiaro che ogni sistema di riferimento $\mathcal{R}$ introduce due funzioni biunivoche:

$$c_{\mathcal{R}}\colon S_3 \to \mathbb{R}^3, \quad P \mapsto (x, y, z), \tag{1.2.2}$$
$$c_{\mathcal{R}}\colon V_3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{u} \mapsto (u_1, u_2, u_3), \tag{1.2.3}$$

dove (x, y, z) sono le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}$ e (u_1, u_2, u_3) sono le coordinate di $\vec{u}$ rispetto alla base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ associata ad $\mathcal{R}$.

Esercizi.

- Siano dati i vettori $\vec{v}(1, 2, 3)$, $\vec{w}(1, 1, 1)$ e $\vec{v}_1(1, -1, 0)$, $\vec{v}_2(0, 1, 1)$, $\vec{v}_3(2, 2, 4)$.
  1. Si possono scrivere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$? Se sì, trovare i coefficienti della combinazione lineare.
  2. $\vec{v}_2$ è combinazione lineare di $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_3$?
- Si consideri $\mathbf{V}_2$ ed una sua base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, i vettori
  $$\vec{v}_1 = (1 - t)\vec{e}_1 + t\vec{e}_2, \qquad \vec{v}_2 = t\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$
  costituiscono una base di $\mathbf{V}_2$?
- Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{V}_3$ riferiti alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:
  $$\vec{v}_1(2 - h, 4 - 2h, 2 - h), \qquad \vec{v}_2(h, 3h, 2h), \qquad \vec{v}_3(1 - h, 1 - 2h, h).$$
  1. determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{w}(1 - 2h, 1 - h, -5h)$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.
  2. Esaminare il caso $h = 0$.

1.3 Cambiamenti di base

Siano $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\}$ due basi di $\mathbf{V}_3$. Se (b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}) sono le coordinate di $\vec{e'}_i$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, la matrice $B = (b_{ij})$ $(i, j = 1, 2, 3)$ avrà determinante diverso da 0, ed è detta *matrice del cambiamento dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$*. Naturalmente, la matrice del cambiamento dalla base $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ sarà B^{-1}.

Due basi si dicono *equiverse* se $\det A > 0$, *contraverse* se $\det A < 0$; "essere equiverse" è una relazione d'equivalenza.

Se $\vec{v} \in \mathbf{V}_3$, allora
$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i, \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v'_i \vec{e'}_i.$$
La matrice B permette di trovare il legame tra le coordinate v_i (relative alla base $\mathcal{B}$) e quelle v'_i (relative alla base $\mathcal{B}'$).

Esempio. Si consideri $\mathbf{V}_3$ riferito alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

1. Riconoscere che i vettori

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{v}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{v}_3 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

   formano una base $\mathcal{B}'$ per $\mathbf{V}_3$ equiversa a $\mathcal{B}$.

2. Determinare le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$, sapendo che $\vec{v}$ ha coordinate $(3, -1, 2)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

(Suggerimento: per il punto 2, scrivere $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$ e poi sostituire $\vec{v}_i$.)

In generale, siano (a, b, c) le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e (a', b', c') le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Allora risulta

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix},$$

quindi le coordinate cambiano con l'*inversa* della matrice del cambiamento di base.

1.4 Altre operazioni in $\mathbf{V}_3$

1.4.a Prodotto scalare

Il *prodotto scalare* tra due vettori di $\mathbf{V}_3$ è l'applicazione

$$g \colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbb{R}, \quad g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ o } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà (la cui dimostrazione è lasciata al lettore):

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, <u>commutatività</u>

2. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, <u>omogeneità</u>

3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, <u>distributività</u>

4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ una <u>base ortonormale</u> di $\mathbf{V}_3$ (cioè i tre vettori sono mutuamente ortogonali ed hanno modulo unitario); allora

$$\begin{aligned} &\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = 1, \qquad &&\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = 1, \qquad &&\vec{k}\cdot\vec{k} = 1,\\ &\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0, &&\vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0, &&\vec{\imath}\cdot\vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Posto $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, usando le proprietà, si ha:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{1.4.4}$$

Si osservi che se $\mathcal{B}$ non fosse ortonormale, l'espressione precedente non sarebbe così semplice. Inoltre, si vede facilmente che

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}. \tag{1.4.5}$$

Dunque, *conoscendo il prodotto scalare*, si può determinare la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori. Tutta la geometria euclidea si può dedurre dalla nozione di prodotto scalare (1.4.4), assumendo le (1.4.5) come *definizioni* di *modulo* e di *angolo* tra due vettori (vedi esercizi).

Poiché $\mathcal{B}$ è ortonormale segue anche che

$$v_1 = \vec{v}\cdot\vec{\imath} = \|\vec{v}\|\,\cos\widehat{\vec{v}\vec{\imath}}, \quad v_2 = \vec{v}\cdot\vec{\jmath} = \|\vec{v}\|\,\cos\widehat{\vec{v}\vec{\jmath}}, \quad v_3 = \vec{v}\cdot\vec{k} = \|\vec{v}\|\,\cos\widehat{\vec{v}\vec{k}}.$$

Si chiamano *coseni direttori di* $\vec{v}$ le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ del *versore* di $\vec{v}$, essendo per definizione

$$\operatorname{vers}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|},$$

quindi se $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, i suoi coseni direttori sono

$$\frac{v_1}{\|\vec{v}\|} = \cos\widehat{\vec{v}\vec{\imath}}, \quad \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} = \cos\widehat{\vec{v}\vec{\jmath}}, \quad \frac{v_3}{\|\vec{v}\|} = \cos\widehat{\vec{v}\vec{k}},$$

il che spiega il nome (danno, infatti, la *direzione* di $\vec{v}$).

La *componente ortogonale* di $\vec{v}$ rispetto ad un vettore non nullo $\vec{u}$ è il <u>numero reale</u>

$$v_{\vec{u}} = \|\vec{v}\|\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v}\cdot\operatorname{vers}\vec{u} \in \mathbb{R}.$$

La *proiezione ortogonale* di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ è il <u>vettore</u>

$$\vec{v}_{\vec{u}} = v_{\vec{u}}\operatorname{vers}\vec{u}.$$

Esempi ed esercizi.

- Determinare l'angolo tra la diagonale di un cubo ed un lato.

  Si consideri il cubo individuato dai vettori $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Allora la diagonale è data dal vettore $\vec{OP} = (1, 1, 1)$. Poiché $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, segue

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{\imath}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\imath}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{\imath}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vec{v}\vec{\imath}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Determinare l'angolo tra la diagonale di un cubo e la diagonale di una faccia.
- Se $\mathcal{A}$ è l'area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, provare che

$$\mathcal{A}^2 = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix}.$$

- Dal punto precedente dedurre che

$$\begin{aligned} |\vec{u} \cdot \vec{v}| &\le \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|, && \text{disug. di \underline{Cauchy–Schwarz}} \\ \|\vec{u} + \vec{v}\| &\le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, && \text{disug. \underline{triangolare}.} \end{aligned}$$

- Verificare l'identità

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

  ed esprimerne il significato geometrico.

1.4.b Prodotto vettoriale

Il *prodotto vettoriale* tra vettori è l'applicazione

$$h \colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3, \quad h(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{w} & \end{cases}$$

dove $\vec{w}$ ha direzione perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, verso tale che la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sia equiversa a $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ e modulo $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin \widehat{\vec{u}\vec{v}}$.

Il prodotto vettoriale verifica le seguenti proprietà (la cui dimostrazione è lasciata al lettore):

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, <u>anticommutatività</u>,
2. $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, <u>omogeneità</u>,
3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, <u>distributività</u>.,

Se $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ è una base ortonormale, allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Per dimostrare la precedente espressione, si scrivano $\vec{u} = u_1\vec{\imath}+u_2\vec{\jmath}+u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{\imath}+v_2\vec{\jmath}+v_3\vec{k}$ e si tenga conto delle identità $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$.

1.4.c Prodotto misto

Il *prodotto misto* di tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$ è dato dal numero reale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$. Considerata una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ si ha

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Infatti, basta calcolare le coordinate di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ come detto nel paragrafo precedente e tener conto dell'espressione analitica del prodotto scalare.

Esercizi.

- Confrontare le definizioni di prodotto scalare e vettoriale con quelle impartite nei corsi di Fisica.

- Provare che $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \mathcal{A}$, area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- Provare che $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \mathcal{V}$, volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

  Naturalmente, il volume del tetraedro costruito sui vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ è $1/6\,\mathcal{V}$.

- Dati i vettori $\vec{v}_1(1, 2, 0)$, $\vec{v}_2(1, -1, 2)$, $\vec{v}_3(3, 0, 2)$, determinare il vettore $\vec{w} = (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$. Verificare che $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ sono linearmente dipendenti ed esprimere $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

- Provare che il prodotto vettoriale non soddisfa la proprietà associativa, ossia che

  $$\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) \neq (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{z}.$$

  Interpretare geometricamente il risultato.

1.5 Trasformazioni ortogonali

In questa sezione verranno studiate le funzioni tra spazi vettoriali euclidei che conservano i prodotti scalari. Tali funzioni conservano anche le distanze, le lunghezze e gli angoli.

1.5.a Definizione

Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo. Un endomorfismo $f\colon V \to V$ si dice *trasformazione ortogonale* se

$$g(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = g(\vec{x}, \vec{y}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

cioè se f è un'applicazione che conserva il prodotto scalare. In particolare, f trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.

Teorema 1.1. *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale euclideo V con prodotto scalare g. Le seguenti condizione sono equivalenti:*

1. $g(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = g(\vec{x}, \vec{y})$ *per ogni* $\vec{x}, \vec{y} \in V$;
2. $\|f(\vec{x})\|_g = \|\vec{x}\|_g$ *per ogni* $\vec{x} \in V$;
3. $f^* \circ f = \mathrm{Id}_V = f \circ f^*$, *ossia* $f^* = f^{-1}$.
4. *per una base ortonormale* $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *si ha che* $f(\mathcal{B}) = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ *è una base ortonormale di* V.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Si ponga $\vec{x} = \vec{y}$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Segue tenendo conto del fatto che

$$2g(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} + \vec{y}\|_g^2 - \|\vec{x}\|_g^2 - \|\vec{y}\|_g^2$$

e analogamente per $f(\vec{x})$ e $f(\vec{y})$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Infatti $g(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = g(\vec{x}, f^*(f(\vec{y})))$ per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in V$. Ma $g(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = g(\vec{x}, \vec{y})$, quindi

$$g(\vec{x}, (f^*(f(\vec{y})) - \vec{y})) = 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad \Rightarrow \quad f^*(f(\vec{y})) = \vec{y} \ \ \forall \vec{y}.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Per definizione $g(f(\vec{x}), \vec{z}) = g(\vec{x}, f^*(\vec{z}))$ per ogni $\vec{x}, \vec{z} \in V$. Posto $\vec{z} = f(\vec{y})$ e ricordando che $f^* = f^{-1}$ si ha la tesi.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Segue tenendo conto le equivalenze sopra dimostrate.

(4) equivale a dire che $g(f(e_i), f(e_j)) = g(e_i, e_j)$. È facile rendersi conto del fatto che se l'uguaglianza è verificata su una base ortonormale allora è verificata su tutto V e viceversa. $\boxed{QED}$

Dal punto (2) segue che

$$\mathrm{dist}(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|_g = \|\vec{x} - \vec{y}\|_g = \mathrm{dist}(\vec{x}, \vec{y}),$$

cioè f è una *isometria* (lineare), cioè f conserva le distanze.

Dal punto (3) segue che, indicata con $A = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice di f rispetto ad una base ortonormale $\mathcal{B}$, si ha

$$A^T A = \mathrm{Id} = AA^T \quad \Rightarrow \quad A^T = A^{-1},$$

cioè A è una matrice *ortogonale.* Un cambiamento di base ortonormale è rappresentato da una matrice ortogonale.

Dal punto (3) segue anche che f è un isomorfismo.

Teorema 1.2. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare g, e sia $f\colon V \to V$ una trasformazione ortogonale. Gli eventuali autovalori (reali) di f sono ± 1.*

Dimostrazione. Sia λ un autovalore di f. Allora

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \quad \Rightarrow \quad \|f(\vec{x})\|_g = \|\lambda \vec{x}\|_g = |\lambda| \|\vec{x}\|_g.$$

Ma $\|f(\vec{x})\|_g = \|\vec{x}\|_g$ da cui la tesi, essendo $\|\vec{x}\|_g \neq 0$. $\boxed{QED}$

Osservazione. Una matrice reale simmetrica A si può diagonalizzare mediante una matrice ortogonale B, cioè data A esiste B ortogonale tale che

$$D = B^{-1}AB = B^T AB$$

sia diagonale. In tal caso A è simile a D ma anche congruente a D. Si noti che una matrice ortogonale in generale non è diagonalizzabile, come mostra l'esempio $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Infatti il polinomio caratteristico di A non ha zeri reali.

Esercizio. Sia U un piano di $\mathbb{R}^3$. La proiezione $p_U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non è una trasformazione ortogonale poiché non è una isometria.

1.5.b Gruppo ortogonale

Il sottoinsieme

$$\mathbb{O}(n; \mathbb{R}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A^T = A^{-1}\} \subset \mathbb{R}^{n,n}$$

è un gruppo rispetto alla moltiplicazione tra matrici (verificarlo!). Si ha

$$\mathbb{O}(n; \mathbb{R}) = \mathbb{O}^+(n; \mathbb{R}) \cup \mathbb{O}^-(n; \mathbb{R}),$$

dove

$$\mathbb{O}^+(n;\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathbb{O}(n;\mathbb{R}) \mid \det A = 1\},$$
$$\mathbb{O}^-(n;\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathbb{O}(n;\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}.$$

Si vede facilmente che $\mathbb{O}^+(n;\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $\mathbb{O}(n;\mathbb{R})$, mentre non lo è $\mathbb{O}^-(n;\mathbb{R})$. Le matrici di $\mathbb{O}^+(n;\mathbb{R})$ rappresentano cambiamenti di basi ortonormali equiverse, mentre quelle di $\mathbb{O}^-(n;\mathbb{R})$ contraverse. Le matrici di $\mathbb{O}^+(n;\mathbb{R})$ sono dette matrici di *rotazioni*, quelle di $\mathbb{O}^-(n;\mathbb{R})$ sono dette matrici di *ribaltamenti*.

Vedremo subito la motivazione di questi nomi.

Caso particolare $n = 2$. Se $A \in \mathbb{O}^+(2;\mathbb{R})$, allora essa ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = R(\varphi).$$

Si verifichi che $R(\varphi) \cdot R(\psi) = R(\varphi + \psi)$.

La trasformazione ortogonale $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f_A(X) = AX$ è una <u>rotazione</u> di angolo φ. Se $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, l'unico vettore fisso è il vettore nullo e non esistono autovettori per f. (Le radici dell'equazione caratteristica non sono reali.) Per $\varphi = k\pi$ si ha $R(\varphi) = \pm\,\mathrm{Id}$.

Se $A \in \mathbb{O}^-(2;\mathbb{R})$, allora essa ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = S(\varphi).$$

Si verifichi che $S(\varphi) \cdot S(\psi) = R(\varphi - \psi)$.

La trasformazione ortogonale $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f_A(X) = AX$ ha autovalori ± 1 e autospazi

$$V(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\}$$
$$V(-1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\}$$

Le rette $V(1)$ e $V(-1)$ sono tra loro ortogonali, e $V(1)$ è il luogo dei punti fissi. f_A si dice *ribaltamento* o *simmetria assiale* (rispetto alla retta $V(1)$). L'endomorfismo f_A è semplice ed $A = S(\varphi)$ è simile alla matrice $S(0)$, che esprime il ribaltamento intorno all'asse x, mentre, ovviamente, $S(\varphi)$ esprime il ribaltamento rispetto alla retta $y = x \operatorname{tg}(\varphi/2)$.

Esercizi.

- Si verifichi che $R(\varphi) \cdot S(0) = S(\varphi)$, e si interpreti geometricamente il risultato.
- Calcolare $S(0) \cdot R(\varphi)$.

- Dire se $\mathbb{O}(2;\mathbb{R})$ e $\mathbb{O}^+(2;\mathbb{R})$ sono gruppi commutativi.
- È vero che $R(-\varphi) = -R(\varphi)$?
- Provare che le simmetrie assiali generano tutti gli elementi di $\mathbb{O}(2;\mathbb{R})$.

Caso particolare $n = 3$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una trasformazione ortogonale e consideriamo il sottospazio dei vettori fissi

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\}.$$

Teorema 1.3. *Si ha*

$$\begin{array}{lll}
\dim U = 3 & \Rightarrow & f \text{ identità} \\
\dim U = 2 & \Rightarrow & f \text{ simm. ort. risp. } U \\
\dim U = 1 & \Rightarrow & f \text{ rotaz. intorno } U \\
\dim U = 0 & \Rightarrow & f \text{ rotosimmetria}
\end{array}$$

dove per rotosimmetria si intende la composizione di una rotazione intorno ad una retta e di una simmetria rispetto ad un piano.

Dimostrazione. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale contenente una base di $V(1)$ e $A = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, allora, posto $U = V(1)$, nel caso $U \neq \{\vec{0}\}$,

$$\begin{array}{lll}
\dim U = 3 & \Rightarrow & A = \mathrm{Id} \\
\dim U = 2 & \Rightarrow & A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\dim U = 1 & \Rightarrow & A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix} = \tilde{R}(\varphi) \\
\dim U = 0 & \Rightarrow & A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix} = \tilde{S}(\varphi)
\end{array}$$

Le affermazioni precedenti si basano sul fatto che se due sottospazi A, $B \subset V$ sono composti di vettori $\vec{a} \in A$ e $\vec{b} \in B$ che sono ortogonali: $g(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, allora anche le loro immagini $f(A)$ e $f(B)$ sono composte di vettori ortogonali. Questa considerazione deve essere applicata alla scomposizione $V_3 = U \oplus U^\perp$ nel caso in cui $U \neq \{\vec{0}\}$ oppure $V_3 = V(-1) \oplus V(-1)^\perp$ nel caso in cui $U = \{\vec{0}\}$. Si ricordi che un endomorfismo in uno spazio vettoriale di dimensione dispari ammette sempre un autovalore reale poiché il polinomio caratteristico ha grado dispari. $\boxed{QED}$

Corollario 1.1 (Teorema di Eulero)**.** *Una trasformazione ortogonale con determinante positivo, cioè una rotazione, o è l'identità o è una rotazione propria intorno ad una retta (teorema di Eulero).*

Nota. Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare g. Il sottoinsieme

$$\mathbb{O}(V,g) \stackrel{\text{def}}{=} \{f\colon V \to V \mid f \text{ ortogonale}\} \subset \mathrm{End}(V) = \mathrm{Lin}(V,V)$$

è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Scelta una base $\mathcal{B}$ ortonormale di V, è immediato verificare che l'applicazione

$$\mathcal{M}\colon \mathbb{O}(V,g) \to \mathbb{O}(n,\mathbb{R}),\ f \mapsto \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

è un isomorfismo di gruppi.

1.5.c Angoli di Eulero

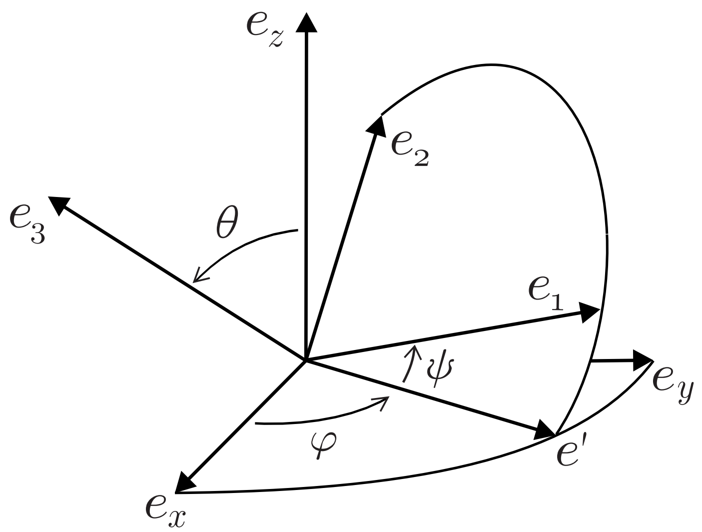

Figura 1.1. Angoli di Eulero

Il gruppo $SO(3)$ ammette una parametrizzazione mediante tre angoli, detti *angoli di Eulero* (figura 1.1) [1]. Questa parametrizzazione permette di ottenere una matrice di rotazione generica (ossia un elemento di $SO(3)$) mediante la rotazione di tre angoli ψ, θ, φ rispetto a tre assi in successione. Più precisamente, si osservi che ogni matrice di $SO(3)$ è un'applicazione lineare che trasforma una base ortonormale data $\{\vec{\imath}_1, \vec{\imath}_2, \vec{\imath}_3\}$ (indicati con $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ nella figura) in un'altra base ortonormale $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Quest'ultima può essere individuata dalla seguente successione di trasformazioni ortogonali.

1. una prima trasformazione ortogonale T_ψ che porta la base ortonormale $\{\vec{\imath}_1, \vec{\imath}_2, \vec{\imath}_3\}$ nella base ortonormale $\{\vec{\bar{e}}_1, \vec{\bar{e}}_2, \vec{\bar{e}}_3\}$. La trasformazione è una rotazione attorno all'asse $\vec{\imath}_3$ (dunque $\vec{\imath}_3 = \vec{\bar{e}}_3$) di un angolo ψ in modo tale che il trasformato $\vec{\bar{e}}_1$ dell'asse

$\vec{\imath}_1$ giaccia nel piano individuato da $\{\vec{\imath}_1, \vec{\imath}_2\}$. La trasformazione è definita da

$$\begin{aligned} T_\psi(\vec{\imath}_1) &= \vec{\tilde{e}}_1 = \cos\psi \vec{\imath}_1 + \sin\psi \vec{\imath}_2, \\ T_\psi(\vec{\imath}_2) &= \vec{\tilde{e}}_2 = -\sin\psi \vec{\imath}_1 + \cos\psi \vec{\imath}_2, \\ T_\psi(\vec{\imath}_2) &= \vec{\tilde{e}}_2 = \vec{\imath}_3, \end{aligned}$$

in maniera sintetica:

$$T_\psi(\vec{\imath}_h) = \sum_k T^k_{\psi\ h} \vec{\imath}_k \tag{1.5.6}$$

La matrice di questa trasformazione, agente sulle componenti rispetto alla base $\{\vec{\imath}_1, \vec{\imath}_2, \vec{\imath}_3\}$, ha per colonne le componenti di $T_\psi(\vec{\imath}_1)$, $T_\psi(\vec{\imath}_2)$, $T_\psi(\vec{\imath}_3)$, ossia $\sum_k T^k_{\psi\ h} \vec{\imath}_k$ con $k = 1, 2, 3$. Si ottiene

$$T_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{1.5.7}$$

L'angolo ψ è detto *angolo di precessione.*

Si noti che, seguendo la convenzione di [1], la rotazione T_ψ è scritta come un cambiamento di sistema di riferimento, dove lo stesso vettore $\vec{e}_x$ è visto dopo la trasformazione nel sistema di riferimento di arrivo, che è ruotato di un angolo negativo ψ rispetto al sistema di riferimento iniziale. Questo si chiama punto di vista *passivo.* Equivalentemente, la rotazione può essere intesa come una rotazione di ogni vettore di un angolo positivo φ (punto di vista *attivo*). Per maggiori informazioni si veda [3, p. 134], dove, però, la rotazione è definita usando angoli di segno opposto!

2. una seconda trasformazione ortogonale che porta la base ortonormale $\{\vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_2, \vec{\tilde{e}}_3\}$ nella base ortonormale $\{\vec{\hat{e}}_1, \vec{\hat{e}}_2, \vec{\hat{e}}_3\}$. La trasformazione è una rotazione intorno all'asse $\vec{\tilde{e}}_1$ (dunque $\vec{\tilde{e}}_1 = \vec{\hat{e}}_1$) di un angolo θ in modo tale che il trasformato $\vec{\hat{e}}_2$ dell'asse $\vec{\tilde{e}}_2$ giaccia nel piano individuato da $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. La trasformazione è definita da

$$\begin{aligned} T_\theta(\vec{\tilde{e}}_1) &= \vec{\hat{e}}_1 = \vec{\hat{e}}_1, \\ T_\theta(\vec{\tilde{e}}_2) &= \vec{\hat{e}}_2 = \cos\theta \vec{\tilde{e}}_2 + \sin\theta \vec{\tilde{e}}_3, \\ T_\theta(\vec{\tilde{e}}_3) &= \vec{\hat{e}}_3 = -\sin\theta \vec{\tilde{e}}_3 + \cos\theta \vec{\tilde{e}}_3, \end{aligned}$$

in maniera sintetica:

$$T_\theta(\vec{\tilde{e}}_h) = \sum_k T^k_{\theta\ h} \vec{\tilde{e}}_k \tag{1.5.8}$$

L'angolo θ è detto *angolo di nutazione.*

3. una terza trasformazione ortogonale che porta la base ortonormale $\{\vec{\hat{e}}_1, \vec{\hat{e}}_2, \vec{\hat{e}}_3\}$ nella base ortonormale $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. La trasformazione è una rotazione intorno all'asse $\vec{\hat{e}}_3$

(dunque $\vec{\tilde{e}}_3 = \vec{e}_3$) che porta $\{\vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_2\}$ a coincidere con $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. La trasformazione è definita da

$$\begin{aligned}
T_\varphi(\vec{\tilde{e}}_1) &= \vec{e}_1 = \cos\varphi \vec{\tilde{e}}_1 + \sin\varphi \vec{\tilde{e}}_2, \\
T_\varphi(\vec{\tilde{e}}_2) &= \vec{e}_2 = -\sin\varphi \vec{\tilde{e}}_1 + \cos\varphi \vec{\tilde{e}}_2, \\
T_\varphi(\vec{\tilde{e}}_2) &= \vec{e}_2 = \vec{\tilde{e}}_3,
\end{aligned}$$

in maniera sintetica:

$$T_\varphi(\vec{\tilde{e}}_h) = \sum_k T_{\varphi\ h}^{k} \vec{\tilde{e}}_k \tag{1.5.9}$$

L'angolo φ è detto *angolo di rotazione propria.*

Componendo le tre applicazioni lineari precedenti si ha:

$$\begin{aligned}
T_\varphi(\vec{\tilde{e}}_m) &= \sum_k T_{\varphi\ m}^{k} \vec{\tilde{e}}_k \\
&= \sum_{k,p} T_{\varphi\ m}^{k} T_{\theta\ k}^{p} \vec{\tilde{\tilde{e}}}_p \\
&= \sum_{k,p,q} T_{\varphi\ m}^{k} T_{\theta\ k}^{p} T_{\psi\ p}^{q} \vec{\imath}_q \\
&= \sum_q T^q_{\ m} \vec{\imath}_q.
\end{aligned}$$

Questo definisce l'applicazione lineare T la cui matrice è $T = T_\psi T_\theta T_\varphi$. Si ha

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.5.10}$$

Si noti la differenza con la convenzione del libro [3].

1.6 Trasformazioni dello spazio euclideo

Si dice *distanza* tra due punti P, $Q \in S_3$ il numero

$$\mathrm{dist}(P, Q) = \|P - Q\| = \|\vec{QP}\|. \tag{1.6.11}$$

Si dice *distanza* tra due sottoinsiemi A, $B \subset S_3$ il numero

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{d(P, Q) \mid P \in A,\ Q \in B\}. \tag{1.6.12}$$

Una funzione $f\colon S_3 \to S_3$ si dice *trasformazione rigida* se per ogni P, $Q \in S_3$ si ha

$$\mathrm{dist}(f(P), f(Q)) = \mathrm{dist}(P, Q). \tag{1.6.13}$$

Si dimostra facilmente che l'insieme delle trasformazioni rigide costituisce un gruppo non commutativo.

Sia $O \in S_3$ un punto fissato dello spazio euclideo, e sia $T\colon V_3 \to V_3$ una trasformazione ortogonale. Si dice *trasformazione ortogonale dello spazio* S_3 la funzione

$$f_T\colon S_3 \to S_3, \quad f(P) = O + T(\vec{OP}). \tag{1.6.14}$$

Sia $\vec{v} \in S_3$. Si dice *traslazione* la funzione

$$t_{\vec{v}}\colon S_3 \to S_3, \quad t_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}. \tag{1.6.15}$$

Si dice *movimento* una funzione $m\colon S_3 \to S_3$ ottenuta come composizione di una traslazione con una trasformazione ortogonale: $m = t_{\vec{v}} \circ f_T$.

Teorema 1.4. *Le trasformazioni rigide di S_3 sono tutti e soli i movimenti di S_3.*

Dimostrazione. Si prova immediatamente che un movimento m è una trasformazione rigida, infatti

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(m(P), m(Q)) &= \|m(P) - m(Q)\| = \|f_T(\vec{OP}) + \vec{v} - f(\vec{OQ}) - \vec{v}\| \\ &= \|f_T(\vec{OP} - \vec{OQ})\| = \|\vec{OP} - \vec{OQ}\| = \mathrm{dist}(P, Q).\end{aligned} \tag{1.6.16}$$

Viceversa, sia f una trasformazione rigida. Sia $O \in S_3$. Si consideri la funzione

$$T\colon V_3 \to V_3, \quad \vec{v} \mapsto f(O + \vec{v}) - f(O). \tag{1.6.17}$$

La funzione T soddisfa, per ogni $\vec{v} \in V_3$,

$$\|T(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|. \tag{1.6.18}$$

In maniera analoga a quanto visto per il teorema 1.1 si dimostra che

$$g(T(\vec{v}), T(\vec{w})) = g(\vec{v}, \vec{w}). \tag{1.6.19}$$

Una funzione T che soddisfa la precedente identità è lineare: infatti, presa una base ortonormale $\{\vec{e}_i\}$ l'immagine $\{T(\vec{e}_i)\}$ è un'insieme ortonormale, dunque una base, pertanto dato $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i$ si ha

$$\begin{aligned}T(\vec{v}) = \sum_i T(\vec{v})^i T(\vec{e}_i) = \sum_i g(T(\vec{v}), T(\vec{e}_i)) T(\vec{e}_i) = \\ \sum_i g(\vec{v}, \vec{e}_i) T(\vec{e}_i) = \sum_i v^i T(\vec{e}_i)\end{aligned} \tag{1.6.20}$$

dunque T è lineare.

Risulta, infine, $f = t_{\vec{Of(O)}} \circ f_T$, dove $O \in S_3$ è un punto scelto a piacere. Infatti:

$$\begin{aligned} f(P) =& f(O) + f(O + \vec{OP}) - f(O) \\ =& f(O) + T(\vec{OP}) \\ =& O + T(\vec{OP}) + \vec{Of(O)} \\ =& f_T(P) + \vec{Of(O)} \\ =& t_{\vec{Of(O)}} \circ f_T(P). \end{aligned}$$

$\boxed{QED}$

1.7 Moti rigidi nello spazio euclideo

Un *moto rigido* di un *corpo* $\mathcal{B} \subset S_3$ è una funzione continua (di solito si assume anche la differenziabilità)

$$c\colon \mathbb{R} \times \mathcal{B} \to S_3 \tag{1.7.21}$$

tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed ogni P, $Q \in \mathcal{B}$ si ha

$$\operatorname{dist}(c(t,P), c(t,Q)) = \operatorname{dist}(P,Q). \tag{1.7.22}$$

Nei casi di interesse fisico, ogni moto rigido si può estendere ad una funzione definita su tutto lo spazio:

$$c\colon \mathbb{R} \times S_3 \to S_3, \tag{1.7.23}$$

tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed ogni P, $Q \in S_3$ si ha

$$\operatorname{dist}(c(t,P), c(t,Q)) = \operatorname{dist}(P,Q). \tag{1.7.24}$$

Per quanto visto, per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione

$$c(t,\cdot)\colon S_3 \to S_3, \quad P \mapsto c(t,P) \tag{1.7.25}$$

è una trasformazione rigida dello spazio, dunque un movimento. Ricordando che per ogni trasformazione rigida $f\colon S_3 \to S_3$ si ha

$$f(P) = f(O) + T(\vec{OP}), \tag{1.7.26}$$

un moto rigido è equivalentemente il dato del moto di un punto fissato dello spazio $O \in S_3$ ed una famiglia di trasformazioni ortogonali dipendenti dal tempo $T(t)$:

$$c(t,P) = c(t,O) + T(t)(\vec{OP}). \tag{1.7.27}$$

Spesso, si aggiunge alla condizione di rigidità la richiesta che la configurazione iniziale del corpo, ossia la posizione all'istante 0, coincida con la configurazione di riferimento $\mathcal{B}$:

$$c(0,P) = P \qquad \forall P \in \mathcal{B}. \tag{1.7.28}$$

In questo caso, $T(0)$ è l'identità. Sotto quest'ipotesi si ha il risultato seguente.

Proposizione 1.1. *La trasformazione ortogonale T ha determinante $+1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per $t = 0$ il determinante vale $+1$; il risultato si ottiene per continuità della funzione $\det(T(t,\cdot))$. QED

Si dice *corpo rigido* un corpo $\mathcal{B} \subset S_3$ i cui moti possano essere solo moti rigidi.

Si dice *vettore solidale* ad un corpo rigido un vettore della forma

$$\vec{w}(t) = c(t,P) - c(t,Q), \tag{1.7.29}$$

dove P, $Q \in \mathcal{B}$.

Si dice *terna solidale*, o *riferimento solidale* una terna di vettori della forma

$$\vec{e}_i = \vec{e}_i(t) = c(t,E_i) - c(t,O), \quad i = 1,2,3, \tag{1.7.30}$$

dove O, $E_i \in S_3$ per $i = 1$, 2, 3. Posti

$$\vec{i}_k = E_k - O, \qquad k = 1,2,3, \tag{1.7.31}$$

se $\vec{OP} = y_1\vec{i}_1 + y_2\vec{i}_2 + y_3\vec{i}_3$ si ha

$$\begin{aligned} c(t,P) - c(t,O) =& T(t)(\vec{OP}) \\ =& y_1T(t)(\vec{i}_1) + y_2T(t)(\vec{i}_2) + y_3T(t)(\vec{i}_3) \\ =& y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3. \end{aligned}$$

1.8 Sistemi di coordinate nello spazio euclideo

Si noti che, fissata un'origine $O \in \mathbf{S_3}$, si ha una funzione biunivoca

$$\mathbf{S_3} \to \mathbf{V_3}, \ P \mapsto \vec{OP}$$

quindi un qualunque sistema di coordinate in $\mathbf{V_3}$ dà un sistema di coordinate in $\mathbf{S_3}$ e viceversa.

1.8.a Coordinate lineari

Le coordinate lineari si ottengono fissando una qualunque base in $\mathbf{V_3}$. Se la base è ortonormale le coordinate si dicono *cartesiane*.

1.8.b Coordinate cilindriche

Sia α un piano ed r una retta perpendicolare ad α (detta *asse delle quote*). Posto $O = \alpha \cap r$, consideriamo nel piano α un riferimento polare (ρ, φ) e nella retta r un riferimento cartesiano.

Se P è un punto dello spazio, consideriamo P', la sua proiezione ortogonale su α, e P'', proiezione ortogonale di P su r. Denotiamo (ρ, φ) le coordinate polari di P' in α ed h la coordinata di P'' su r. I tre numeri (ρ, φ, h), associati a P, si chiamano *coordinate cilindriche* di P. Fuori dall'asse r, la corrispondenza è biunivoca. Le coordinate si chiamano *cilindriche* poiché per $\rho = c \in \mathbb{R}$ si ottiene un cilindro rotondo intorno all'asse r di raggio c.

Spesso ad un riferimento cilindrico si associa un riferimento cartesiano $RC(Oxyz)$ tale che r coincida con l'asse z, il semiasse positivo delle x con l'asse polare nel piano α. Allora

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ y = \rho \sin\varphi & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ z = h & h \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1.8.c Coordinate sferiche

Fissiamo nello spazio un riferimento polare costituito da

- un punto O detto *polo*;
- una retta orientata r per O detta *asse polare*;
- un semipiano α di origine r detto *semipiano polare*;
- un'unità di misura per le lunghezze ed un verso positivo per le rotazioni intorno all'asse polare.

Poniamo

$\rho = \|\vec{OP}\|$ <u>raggio vettore</u>,

$\varphi = \widehat{\alpha\beta}$ <u>longitudine</u>, dove β è il piano per r e P, $0 \leq \varphi < 2\pi$,

$\theta = \widehat{\vec{OP}\vec{r}}$ <u>colatitudine</u>, $0 \leq \theta \leq \pi$ ($\psi = \pi/2 - \theta$ <u>latitudine</u>).

I tre numeri (ρ, φ, θ) sono detti *coordinate sferiche*. Al riferimento polare si può associare un riferimento $RC(Oxyz)$ tale che O coincida con il polo, z coincida con l'asse polare, il semiasse positivo delle x appartenga al semipiano polare e coincidano le unità di misura per i segmenti. Allora

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z = \rho \cos\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Le coordinate si dicono *sferiche* poiché, per $\rho = \mathrm{cost}$, si ottengono sfere concentriche. Pertanto, per $\rho = R$, le equazioni precedenti sono equazioni parametriche della sfera di centro O e raggio R; le coordinate (φ, θ) sono *coordinate geografiche* sulla sfera.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Biscari, T. Ruggeri, G. Saccomandi, M. Vianello: Meccanica Razionale, Unitext **69**, Springer 2013. 1.5.c, 1

[2] G. De Cecco, R. Vitolo: Note di Geometria e Algebra, (2008) `http://poincare.unisalento.it/vitolo`

[3] H. Goldstein: Classical Mechanics, 2nd ed., Addison-Wesley 1980. 1, 1.5.c

[4] L. Landau, L. Lifsits: Meccanica, Editori Riuniti, 2009.

[5] Muracchini, Ruggeri, Seccia: Esercizi e Temi d'esame di Meccanica Razionale, Società Editrice Esculapio.