Università del Salento
Dipartimento di Matematica e Fisica
"E. De Giorgi"

Raffaele Vitolo
email: raffaele.vitolo@unisalento.it
web: http://poincare.unisalento.it/vitolo

Complementi di
Meccanica Razionale

Versione del 5 marzo 2015

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

INDICE

CAPITOLO 1

VETTORI DELLO SPAZIO ORDINARIO

Il concetto di vettore applicato in un punto è già noto dalla Fisica. Qui vogliamo introdurre il concetto di vettore libero, che ha suggerito la generalizzazione a spazi vettoriali astratti.

1.1 Definizioni

1.1.a Spazio $\mathbf{V}_3$

Si consideri lo spazio ordinario della geometria euclidea. Ogni segmento di estremi A e B individua due segmenti orientati AB e BA aventi orientazioni opposte; ciò è espresso scrivendo che

$$AB = -BA \quad \text{oppure} \quad \vec{AB} = -\vec{BA}.$$

Nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio introduciamo la seguente relazione di equivalenza, detta di *equipollenza* (cioè di uguale valore ed efficacia)

$$AB \sim CD \quad \Leftrightarrow \quad \text{i punti medi di } AD,\ BC \text{ coincidono.}$$

Segue che AB è parallelo a CD (che si denota $AB \parallel CD$) e $\|AB\| = \|CD\|$, dove $\|AB\|$ indica il *modulo* o *lunghezza* del segmento AB. Le classi di equivalenza si chiamano *vettori* (liberi). Il vettore $\vec{u}$ individuato da $\vec{AB}$ e da tutti quelli ad esso equipollenti (come $\vec{CD}$) soddisfa l'uguaglianza $\vec{u} = [\vec{AB}] = [\vec{CD}]$. Il rappresentante $\vec{AB}$ di un vettore $\vec{u}$ si dice *vettore $\vec{u}$ applicato in A* e si indica $(\vec{u}, A)$. Il vettore $\vec{u}$ determina una traslazione dello spazio, da cui la parola, che proviene dal latino *vehere* = trasportare.

$$A + \vec{u} = B \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = B - A = \vec{AB}.$$

La notazione $\vec{u} = B - A$, molto felice, è di W. R. Hamilton (1805–1865), il primo che ha dato il concetto preciso di vettore.

I segmenti AA, BB, $\ldots$, individuano il vettore nullo $\vec{0}$.

Un vettore non nullo è individuato dalla direzione, dal verso e dal modulo. Indichiamo con $\mathbf{V}_3$ l'insieme dei vettori liberi dello spazio e con $\mathbf{S}_3$ i punti dello spazio. Fissato un punto $O \in \mathbf{S}_3$, ad ogni punto $P \in \mathbf{S}_3$ si può associare un unico vettore $\vec{u} \in \mathbf{V}_3$, ponendo $\vec{u} = \vec{OP}$.

1.1.b Somma di vettori

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori, che vogliamo sommare. Se si considerano i rappresentanti indicati $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - B$, poniamo

$$\vec{u} + \vec{v} = C - A$$

(che non dipende dai rappresentanti scelti). Si vede facilmente che $(\mathbf{V}_3, +)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro $\vec{0}$ e $-\vec{u} = A - B$ se $\vec{u} = B - A$.

Si osservi che se consideriamo rappresentanti opportuni $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AD}$, allora $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ è la diagonale del parallelogramma di lati AB e AD, in accordo con quanto si studia in Fisica.

1.1.c Differenza di vettori

Per definizione poniamo

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Se $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - A$, allora $\vec{u} - \vec{v} = B - C$.

1.1.d Prodotto di un numero reale per un vettore

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbf{V_3}$. Vogliamo definire $\lambda\vec{u}$.

1. Se $\lambda = 0$, oppure $\vec{u} = \vec{0}$, poniamo $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.
2. Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, il vettore $\lambda\vec{u}$ ha direzione coincidente con $\vec{u}$, verso concorde con quello di $\vec{u}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$, e inoltre

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto *scalare*.

Valgono le seguenti proprietà immediate

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}, \qquad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u},$$
$$(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}, \qquad 1\,\vec{u} = \vec{u}$$
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

1.2 Dipendenza ed indipendenza lineare

1.2.a Dipendenza lineare

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente dipendenti* se e solo se esiste una n-pla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tale che

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Infatti se $\lambda_n \neq 0$,

$$\vec{v}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\vec{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\vec{v}_{n-1},$$

cioè $\vec{v}_n$ 'dipende' da $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$. Più precisamente, si dice che $\vec{v}_n$ è combinazione lineare di $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$. In generale, si dice che un vettore $\vec{v}$ è *combinazione lineare* di $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ se

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n\,. \tag{1.2.1}$$

1.2.b Indipendenza lineare

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente indipendenti* se e solo se *non* sono linearmente dipendenti, cioè

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Chiaramente vale sempre (sia nel caso dell'indipendenza, sia nel caso della dipendenza)

$$\lambda_i = 0 \text{ per ogni } i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}\,.$$

1.2.c Significato geometrico

Siano $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{V}_3$. Allora

$$\begin{aligned} \vec{v} \text{ dipendente} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ dipendenti} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ dipendenti} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ complanari.} \end{aligned}$$

(I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono detti complanari se i loro rappresentanti applicati in uno stesso punto appartengono ad un piani)

Quindi, se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sono indipendenti essi sono non complanari e possono considerarsi come vettori di un sistema di riferimento dello spazio. Ne segue che $n \geq 4$ vettori di $\mathbf{V}_3$ sono sempre dipendenti, quindi in $\mathbf{V}_3$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 3.

Sia $\mathbf{V}_2$ l'insieme dei vettori del piano; in $\mathbf{V}_2$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 2.

Sia $\mathbf{V}_1$ l'insieme dei vettori della retta; in $\mathbf{V}_1$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 1.

Si dice anche che la *dimensione* della retta è 1 ed una sua *base* è data da un vettore non nullo $\{\vec{e}_1\}$; la *dimensione* del piano è 2 ed una sua *base* è data da 2 vettori indipendenti $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$; la *dimensione* dello spazio è 3 ed una sua *base* è data da 3 vettori indipendenti $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di $\mathbf{V}_3$. Allora $\{\vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sono dipendenti e

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3.$$

La terna di numeri $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ è univocamente individuata, e λ_1, λ_2, λ_3 sono dette le *coordinate* di $\vec{v}$ nella base $\mathcal{B}$. Naturalmente, nella base $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 & \text{ha coordinate} & (1,0,0), \\ \vec{e}_2 & \text{ha coordinate} & (0,1,0), \\ \vec{e}_3 & \text{ha coordinate} & (0,0,1). \end{array}$$

Vediamo ora come condizioni vettoriali si traducano in problemi scalari tramite le coordinate. Siano

$$\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \qquad \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \qquad \vec{w}(w_1, w_2, w_3),$$

o, col simbolismo matriciale,

$$\vec{u} = (u_1\ u_2\ u_3)^T, \quad \vec{v} = (v_1\ v_2\ v_3)^T, \quad \vec{w} = (w_1\ w_2\ w_3)^T.$$

Naturalmente $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$, $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Allora:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} au_1 + bv_1 + cw_1 = 0 \\ au_2 + bv_2 + cw_2 = 0 \\ au_3 + bv_3 + cw_3 = 0. \end{cases}$$

Si consideri

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Se $\mathrm{rg}(A) = p$, allora si vede facilmente che p è il massimo numero di vettori indipendenti in $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, come si vede facilmente tenendo conto della risoluzione dei sistemi lineari (omogenei). Se consideriamo n vettori, la matrice A avrà 3 righe ed n colonne, quindi ancora $\mathrm{rg}(A) \leq 3$.

Se consideriamo il riferimento cartesiano (detto *affine*) $\mathcal{R}(Oxyz)$ associato a $\mathcal{B}$ tale che $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ siano i vettori unità sugli assi (applicati in O) si ha, con l'usuale simbolismo (usato per esempio in Fisica)

$$\vec{e}_1 = \vec{\imath}, \quad \vec{e}_2 = \vec{\jmath}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k},$$
$$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_y, \quad u_3 = u_z.$$

Tenendo conto della corrispondenza tra $\mathbf{V}_3$ e $\mathbf{S}_3$ indicata in (2.1), le *coordinate* (x, y, z) del punto P sono le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ nella base $\mathcal{B}$, cioè

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Se $P_i(x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2$, allora

$$P_1\vec{P}_2 = O\vec{P}_2 - O\vec{P}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Esercizi.

- Siano dati i vettori $\vec{v}(1,2,3)$, $\vec{w}(1,1,1)$ e $\vec{v}_1(1,-1,0)$, $\vec{v}_2(0,1,1)$, $\vec{v}_3(2,2,4)$.
  1. Si possono scrivere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$? Se sì, trovare i coefficienti della combinazione lineare.
  2. $\vec{v}_2$ è combinazione lineare di $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_3$?
- Si consideri $\mathbf{V}_2$ ed una sua base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, i vettori

$$\vec{v}_1 = (1-t)\vec{e}_1 + t\vec{e}_2, \qquad \vec{v}_2 = t\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

  costituiscono una base di $\mathbf{V}_2$?
- Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{V}_3$ riferiti alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\vec{v}_1(2-h, 4-2h, 2-h), \qquad \vec{v}_2(h, 3h, 2h), \qquad \vec{v}_3(1-h, 1-2h, h).$$

  1. determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{w}(1-2h, 1-h, -5h)$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.
  2. Esaminare il caso $h = 0$.

1.3 Cambiamenti di base

Siano $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\}$ due basi di $\mathbf{V}_3$. Se (b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}) sono le coordinate di $\vec{e'}_i$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, la matrice $B = (b_{ij})$ $(i, j = 1, 2, 3)$ avrà determinante diverso da 0, ed è detta *matrice del cambiamento dalla base* $\mathcal{B}$ *alla base* $\mathcal{B}'$. Naturalmente, la matrice del cambiamento dalla base $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ sarà B^{-1}.

Due basi si dicono *equiverse* se $\det A > 0$, *contraverse* se $\det A < 0$; "essere equiverse" è una relazione d'equivalenza.

Se $\vec{v} \in \mathbf{V}_3$, allora

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i, \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v'_i \vec{e'}_i.$$

La matrice B permette di trovare il legame tra le coordinate v_i (relative alla base $\mathcal{B}$) e quelle v'_i (relative alla base $\mathcal{B}'$).

Esempio. Si consideri $\mathbf{V}_3$ riferito alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

1. Riconoscere che i vettori

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{v}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{v}_3 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

   formano una base $\mathcal{B}'$ per $\mathbf{V}_3$ equiversa a $\mathcal{B}$.

2. Determinare le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$, sapendo che $\vec{v}$ ha coordinate $(3, -1, 2)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

(Suggerimento: per il punto 2, scrivere $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$ e poi sostituire $\vec{v}_i$.)

In generale, siano (a, b, c) le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e (a', b', c') le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Allora risulta

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix},$$

quindi le coordinate cambiano con l'*inversa* della matrice del cambiamento di base.

1.4 Altre operazioni in $\mathbf{V}_3$

1.4.a Prodotto scalare

Il *prodotto scalare* tra due vettori di $\mathbf{V}_3$ è l'applicazione

$$g \colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbb{R}, \quad g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ o } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà (la cui dimostrazione è lasciata al lettore):

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, <u>commutatività</u>
2. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$, <u>omogeneità</u>
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, <u>distributività</u>
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ una <u>base ortonormale</u> di $\mathbf{V}_3$ (cioè i tre vettori sono mutuamente ortogonali ed hanno modulo unitario); allora

$$\begin{aligned} &\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = 1, && \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = 1, && \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ &\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0, && \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = 0, && \vec{\imath} \cdot \vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Posto $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, usando le proprietà, si ha:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{1.4.2}$$

Si osservi che se $\mathcal{B}$ non fosse ortonormale, l'espressione precedente non sarebbe così semplice. Inoltre, si vede facilmente che

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}. \tag{1.4.3}$$

Dunque, *conoscendo il prodotto scalare*, si può determinare la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori. Tutta la geometria euclidea si può dedurre dalla nozione di prodotto scalare (1.4.2), assumendo le (1.4.3) come *definizioni* di *modulo* e di *angolo* tra due vettori (vedi esercizi).

Poiché $\mathcal{B}$ è ortonormale segue anche che

$$v_1 = \vec{v} \cdot \vec{\imath} = \|\vec{v}\| \cos\widehat{\vec{v}\vec{\imath}}, \quad v_2 = \vec{v} \cdot \vec{\jmath} = \|\vec{v}\| \cos\widehat{\vec{v}\vec{\jmath}}, \quad v_3 = \vec{v} \cdot \vec{k} = \|\vec{v}\| \cos\widehat{\vec{v}\vec{k}}.$$

Si chiamano *coseni direttori di* $\vec{v}$ le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ del *versore* di $\vec{v}$, essendo per definizione

$$\operatorname{vers}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|},$$

quindi se $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, i suoi coseni direttori sono

$$\frac{v_1}{\|\vec{v}\|} = \cos\widehat{\vec{v}\vec{\imath}}, \quad \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} = \cos\widehat{\vec{v}\vec{\jmath}}, \quad \frac{v_3}{\|\vec{v}\|} = \cos\widehat{\vec{v}\vec{k}},$$

il che spiega il nome (danno, infatti, la *direzione* di $\vec{v}$).

La *componente ortogonale* di $\vec{v}$ rispetto ad un vettore non nullo $\vec{u}$ è il numero reale

$$v_{\vec{u}} = \|\vec{v}\| \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v} \cdot \operatorname{vers}\vec{u} \in \mathbb{R}.$$

La *proiezione ortogonale* di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ è il vettore

$$\vec{v}_{\vec{u}} = v_{\vec{u}} \operatorname{vers}\vec{u}.$$

Esempi ed esercizi.

- Determinare l'angolo tra la diagonale di un cubo ed un lato.

  Si consideri il cubo individuato dai vettori $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Allora la diagonale è data dal vettore $\vec{OP} = (1, 1, 1)$. Poiché $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, segue

  $$\cos\widehat{\vec{v}\vec{\imath}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\imath}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{\imath}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vec{v}\vec{\imath}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Determinare l'angolo tra la diagonale di un cubo e la diagonale di una faccia.

- Se $\mathcal{A}$ è l'area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, provare che

$$\mathcal{A}^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} \\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} \end{vmatrix}.$$

- Dal punto precedente dedurre che

$$\begin{aligned} |\vec{u}\cdot\vec{v}| &\leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|, && \text{disug. di \underline{Cauchy–Schwarz}} \\ \|\vec{u}+\vec{v}\| &\leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, && \text{disug. \underline{triangolare}.} \end{aligned}$$

- Verificare l'identità

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

ed esprimerne il significato geometrico.

1.4.b Prodotto vettoriale

Il *prodotto vettoriale* tra vettori è l'applicazione

$$h\colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3, \quad h(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\wedge\vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{w} \end{cases}$$

dove $\vec{w}$ ha direzione perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, verso tale che la terna $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ sia equiversa a $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ e modulo $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\widehat{\vec{u}\vec{v}}$.

Il prodotto vettoriale verifica le seguenti proprietà (la cui dimostrazione è lasciata al lettore):

1. $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$, anticommutatività,
2. $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$, omogeneità,
3. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$, distributività.,

Se $\mathcal{B} = \{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ è una base ortonormale, allora

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Per dimostrare la precedente espressione, si scrivano $\vec{u} = u_1\vec{\imath}+u_2\vec{\jmath}+u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{\imath}+v_2\vec{\jmath}+v_3\vec{k}$ e si tenga conto delle identità $\vec{\jmath}\wedge\vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\imath}\wedge\vec{k} = -\vec{\jmath}$.

1.4.c Prodotto misto

Il *prodotto misto* di tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$ è dato dal numero reale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$. Considerata una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ si ha

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Infatti, basta calcolare le coordinate di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ come detto nel paragrafo precedente e tener conto dell'espressione analitica del prodotto scalare.

Esercizi.

- Confrontare le definizioni di prodotto scalare e vettoriale con quelle impartite nei corsi di Fisica.
- Provare che $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \mathcal{A}$, area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Provare che $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \mathcal{V}$, volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

  Naturalmente, il volume del tetraedro costruito sui vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ è $1/6\,\mathcal{V}$.
- Dati i vettori $\vec{v}_1(1,2,0)$, $\vec{v}_2(1,-1,2)$, $\vec{v}_3(3,0,2)$, determinare il vettore $\vec{w} = (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$. Verificare che $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ sono linearmente dipendenti ed esprimere $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
- Provare che il prodotto vettoriale non soddisfa la proprietà associativa, ossia che

  $$\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) \neq (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{z}.$$

  Interpretare geometricamente il risultato.

1.5 Sistemi di coordinate nello spazio euclideo

Si noti che, fissata un'origine $O \in \mathbf{S_3}$, si ha una funzione biunivoca

$$\mathbf{S_3} \to \mathbf{V_3}, \; P \mapsto \vec{OP}$$

quindi un qualunque sistema di coordinate in $\mathbf{V_3}$ dà un sistema di coordinate in $\mathbf{S_3}$ e viceversa.

1.5.a Coordinate lineari

Le coordinate lineari si ottengono fissando una qualunque base in $\mathbf{V_3}$. Se la base è ortonormale le coordinate si dicono *cartesiane*.

1.5.b Coordinate cilindriche

Sia α un piano ed r una retta perpendicolare ad α (detta *asse delle quote*). Posto $O = \alpha \cap r$, consideriamo nel piano α un riferimento polare (ρ, φ) e nella retta r un riferimento cartesiano.

Se P è un punto dello spazio, consideriamo P', la sua proiezione ortogonale su α, e P'', proiezione ortogonale di P su r. Denotiamo (ρ, φ) le coordinate polari di P' in α ed h la coordinata di P'' su r. I tre numeri (ρ, φ, h), associati a P, si chiamano *coordinate cilindriche* di P. Fuori dall'asse r, la corrispondenza è biunivoca. Le coordinate si chiamano *cilindriche* poiché per $\rho = c \in \mathbb{R}$ si ottiene un cilindro rotondo intorno all'asse r di raggio c.

Spesso ad un riferimento cilindrico si associa un riferimento cartesiano $RC(Oxyz)$ tale che r coincida con l'asse z, il semiasse positivo delle x con l'asse polare nel piano α. Allora

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ y = \rho\sin\varphi & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ z = h & h \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1.5.c Coordinate sferiche

Fissiamo nello spazio un riferimento polare costituito da

- un punto O detto *polo*;
- una retta orientata r per O detta *asse polare*;
- un semipiano α di origine r detto *semipiano polare*;
- un'unità di misura per le lunghezze ed un verso positivo per le rotazioni intorno all'asse polare.

Poniamo

$\rho = \|\vec{OP}\|$ <u>raggio vettore</u>,

$\varphi = \widehat{\alpha\beta}$ <u>longitudine</u>, dove β è il piano per r e P, $0 \leq \varphi < 2\pi$,

$\theta = \widehat{\vec{OP}\vec{r}}$ <u>colatitudine</u>, $0 \leq \theta \leq \pi$ ($\psi = \pi/2 - \theta$ <u>latitudine</u>).

I tre numeri (ρ, φ, θ) sono detti *coordinate sferiche*. Al riferimento polare si può associare un riferimento $RC(Oxyz)$ tale che O coincida con il polo, z coincida con l'asse polare, il semiasse positivo delle x appartenga al semipiano polare e coincidano le unità di misura per i segmenti. Allora

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z = \rho\cos\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Le coordinate si dicono *sferiche* poiché, per $\rho = \text{cost}$, si ottengono sfere concentriche. Pertanto, per $\rho = R$, le equazioni precedenti sono equazioni parametriche della sfera di centro O e raggio R; le coordinate (φ, θ) sono *coordinate geografiche* sulla sfera.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Biscari, T. Ruggeri, G. Saccomandi, M. Vianello: Meccanica Razionale, Unitext **69**, Springer 2013.

[2] G. De Cecco, R. Vitolo: Note di Geometria e Algebra, (2008) http://poincare.unisalento.it/vitolo

[3] H. Goldstein: Classical Mechanics, 2nd ed., Addison-Wesley 1980.

[4] L. Landau, L. Lifsits: Meccanica, Editori Riuniti, 2009.

[5] Muracchini, Ruggeri, Seccia: Esercizi e Temi d'esame di Meccanica Razionale, Società Editrice Esculapio.