Facoltà di Ingegneria Industriale

NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

CORSO DI LAUREA...

Esame di Geometria e Algebra, 8 febbraio 2010

1. **Geometria analitica**

   In un riferimento cartesiano si considerino il punto $A(0, 0, -1)$ e la retta $r\colon 6x = 2z = 3y$.

   (1.1) Trovare la distanza tra A ed r.

   (1.2) Determinare l'angolo tra r ed il piano xy.

   (1.3) Determinare le equazioni delle sfere tangenti al piano xy, col centro su r e passanti per A.

   (1.4) Determinare equazioni parametriche e cartesiana della superficie di rotazione Σ ottenuta facendo ruotare r intorno all'asse z.

2. **Algebra lineare**.

   Sia $\{\vec{e}_i\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si considerino il sottospazio

   $$W = \{\, \vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,\}$$

   e per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^4$ definito da

   $$\begin{array}{ll} f(\vec{e}_1) = (k, k, k, 0), & f(\vec{e}_2) = (-3, -2, -1, 0), \\ f(\vec{e}_3) = (k, k, k, 0), & f(\vec{e}_4) = (2, 1, 0, 0). \end{array}$$

   (2.1) Determinare $\dim(\operatorname{Ker} f_k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

   (2.2) Stabilire se è vera la relazione $\operatorname{Ker} f_0 \oplus \operatorname{Im} f_0 = \mathbb{R}^4$.

   (2.3) Dire se f_0 è semplice.

   (2.4) Trovare una base ortonormale del sottospazio $(\operatorname{Im} f_0)^\perp$.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Ogni esercizio vale 10/30.

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
Esame di Geometria e Algebra, 8 febbraio 2010

Soluzioni degli esercizi

1. **Geometria analitica**

(1.1) La distanza tra A ed r si calcola trovando il segmento perpendicolare ad r avente un estremo in A (e l'altro, H, in r). Il punto H si trova come intersezione del piano perpendicolare ad r e passante per A con la retta r.

(1.2) I parametri direttori di r sono proporzionali a $\vec{r} = (1, 2, 3)$, mentre i parametri di giacitura del piano xy sono prpoporzionali ad $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Quindi, se φ è l'angolo tra il piano e la retta, si ha

$$\sin\varphi = |\cos\widehat{\vec{n}\vec{r}}| = \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{\|\vec{n}\|\|\vec{r}\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

(1.3) La generica sfera

$$S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

è tangente al piano xy se la distanza (in valore assoluto) del suo centro (a, b, c) da esso è uguale al raggio, cioè se

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = d.$$

Poiché il centro appartiene alla retta r si ha $a = 1/3\,c$, $b = 2/3\,c$, $d = 5/9\,c^2$. Imponendo che S passi per A si ha $1 + 2c + d = 0$, da cui

$$1 + 2c + \frac{5}{9}c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{3}{5},\ -3.$$

Quindi le sfere richieste sono

$$S_1\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 6z + 5 = 0,$$
$$S_2\colon 5(x^2 + y^2 + z^2) + 2x + 4y + 6z + 1 = 0.$$

(1.4) Se $P(1/3\,t, 2/3\,t, t)$ è il generico punto di r, il parallelo descritto è una circonferenza di raggio $\rho = \overline{PH}$, dove $H(0, 0, t)$, ed appartenente al piano $z = t$. Quindi $\rho = \sqrt{5}/3\,t$, ed equazioni parametriche di Σ sono

$$x = \rho\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}t\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}t\cos\varphi, \quad z = t.$$

Eliminando i parametri si ottiene l'equazione cartesiana di Σ:

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{9}z^2.$$

2. **Algebra lineare**.

(2.1) La matrice associata ad f_k rispetto alla base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} k & -3 & k & 2 \\ k & -2 & k & 1 \\ k & -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenendo conto del fatto che la matrice ha due colonne uguali, segue facilmente che $\operatorname{rg} A_k = 2$ per ogni k, quindi $\dim \operatorname{Ker} f_k = 4 - 2 = 2$.

(2.2) Con facili calcoli si ha

$$\operatorname{Ker} f_0 = \{(\lambda, 0, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_3),$$

dove $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ed $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ costituiscono una base di $\operatorname{Ker} f_0$;

$$\operatorname{Im} f_0 = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$$

dove $\vec{v}_1 = (-3, -2, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 0, 0)$ costituiscono una base per $\operatorname{Im} f_0$.

Poiché i vettori $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ non sono indipendenti allora $\dim(\operatorname{Ker} f_0 + \operatorname{Im} f_0) < 4$, da cui la conclusione che non si ha somma diretta.

(2.3) $\det(A_0 - \lambda I) = \lambda^3(\lambda + 2) = 0$, quindi gli autovalori sono $\lambda = 0$ con molteplicità 3 e $\lambda = -2$ con molteplicità 1. Ora, $V(0) = \operatorname{Ker} f_0$ e poiché $\dim \operatorname{Ker} f_0 = 2 \neq 3$ segue che f_0 non è semplice.

(2.4) Essendo $x_3 = x_1 + x_2$ si ha $W = \{(a, b, a + b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Una sua base è $\vec{w}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{w}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{w}_3 = (0, 0, 0, 1)$. Quindi $\dim W^\perp = 4 - 3 = 1$ e $W^\perp = \mathcal{L}(\vec{w})$ dove $\vec{w} \cdot \vec{w}_i = 0$ per $i = 1, 2, 3$. Posto $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ si ha $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_4 = 0$ da cui $\vec{w} = (1, 1, -1, 0)$.

(2.4) Una base di $\operatorname{Im} f_0$ è $\{(-3, -2, -1, 0), (2, 1, 0, 0)\}$. Il complemento ortogonale di $\operatorname{Im} f_0$ si trova come l'insieme dei vettori $\vec{v}$ tali che $\vec{v} \cdot (-3, -2, -1, 0) = 0$, $\vec{v} \cdot (2, 1, 0, 0) = 0$. Una base ortonormale si ottiene mediante il metodo di Gram–Schmidt.