NOME e COGNOME.. MATRICOLA n...............

Facoltà di Ingegneria Industriale

Esame di Geometria e Algebra, 1 marzo 2011

1. In un riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(Oxyz)$ in $\mathbf{S}_3$ si considerino le rette r ed s di equazioni

$$r\colon \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \quad s\colon \begin{cases} z=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$$

   (a) Stabilire la mutua posizione tra le due rette.

   (b) Determinare l'equazione del cilindro che ha curva direttrice r e rette generatrici parallele ad s. Quale superficie si ottiene?

2. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard. Si considerino i vettori

$$\vec{v}_1 = (1,1,1,1),\ \vec{v}_2 = (1,0,1,0),\ \vec{v}_3 = (0,0,1,0),\ \vec{v}_4 = (0,0,0,-1)$$

   riferiti alla base canonica $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo cos definito

$$f(\vec{v}_1) = \vec{v}_2,\ f(\vec{v}_2) = \vec{v}_1,\ f(\vec{v}_3) = \vec{v}_3,\ f(\vec{v}_4) = -\vec{v}_4.$$

   Trovare la matrice $M = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Provare che $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

4. Con riferimento al punto precedente, determinare, dopo aver osservato che esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

5. Considerata A, matrice del punto 3, come la matrice associata ad una forma bilineare simmetrica β, vedere se β è un prodotto scalare.

6. Data la quadrica

$$3x^2 + 2y^2 + 2xz + 3z^2 - 4 = 0$$

   si dica di che tipo di quadrica si tratta e si trovi una forma canonica dell'equazione.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 1 marzo 2011

Soluzioni degli esercizi

1. (a) Passando alle equazioni parametriche, si verifica che le due rette non sono parallele, e che non hanno nessuna intersezione, dunque le rette sono sghembe.

   (b) Si ottiene l'equazione del piano passante per r e contenente s.

2. Il risultato può seguire sia dal calcolo diretto, ricavando i valori di $f(\vec{e}_i)$ a partire dai dati del problema ($\vec{e}_i$ è il generico vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$), sia con un cambiamento di base trovando prima la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, dove $\mathcal{B} = \{u_i\}$, e poi cambiando la base. Si ha

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $\ker f = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \quad \Rightarrow \quad \dim(\ker f) = 2$,
   $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(\vec{v})$, dove $\vec{v} = (1, 1, 1) \quad \Rightarrow \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 1$.
   Quindi $\operatorname{Im} f = \{(h, h, h) \mid h \in \mathbb{R}\}$. Si verifica immediatamente che $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$

4. A è una matrice simmetrica, quindi esiste una base di autovettori.

$$\det(A - \lambda I) = 3\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \text{ con molteplicità 2 e } \lambda = 3.$$

   Determiniamo una base di $V(0)$ e $V(3)$. Per quanti visto in (2.1) segue

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 1), \qquad \vec{u}_2 = (0, 1, -1), \qquad \vec{u}_3 = (1, 1, 1).$$

5. β non è un prodotto scalare, poiché è una forma degenere ($\det A = 0$); d'altra parte non è definita positiva poiché i suoi autovalori non sono tutti positivi (c'è $\lambda = 0$ contato due volte).

6. La quadrica data è un'ellissoide.