NOME e COGNOME.. MATRICOLA n...............

Facoltà di Ingegneria Industriale

Esame di Geometria e Algebra, 1 marzo 2011

1. In un riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(Oxyz)$ si considerino il punto $A(2,-1,4)$ ed il piano $\alpha\colon x-y+3z=0$. Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per A ed ortogonale ad α.

2. Con riferimento al punto precedente, scrivere l'equazione cartesiana della sfera Σ, avente centro sul piano $\beta\colon 2x+2y+2z+1=0$ e che interseca α nella circonferenza Γ di centro $B(1,-2,-1)$ e raggio $\sqrt{6}$.

3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard. Si considerino i vettori
$$\vec{v}_1=(0,1,-1,0),\ \vec{v}_2=(1,0,1,0),\ \vec{v}_3=(0,0,1,0),\ \vec{v}_4=(0,0,0,-1)$$
riferiti alla base canonica $\mathcal{C}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$. Si dimostri che $\mathcal{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4\}$ è una base e che la matrice P del cambiamento di base $X_{\mathcal{B}}=PX_{\mathcal{C}}$ è diagonalizzabile.

4. Con riferimento al punto precedente, sia $f\colon \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ l'endomorfismo così definito
$$f(\vec{v}_1)=\vec{e}_2,\ f(\vec{v}_2)=\vec{e}_1,\ f(\vec{v}_3)=\vec{e}_3,\ f(\vec{v}_4)=-\vec{e}_4.$$
Trovare la matrice $M=\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$.

5. Trovare una base ortonormale del sottospazio $U^\perp\subset\mathbb{R}^4$, dove U è definito da
$$U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1-3x_3+x_4=0,\ x_1+2x_2+x_3=0\}.$$

6. Si dica se il piano $x=y$ interseca la superficie
$$\Sigma\colon 3x^2+2y^2+2xz+3z^2-4=0$$
in almeno un punto e si calcoli il piano tangente alla superficie Σ nel punto $(0,\sqrt{2},0)$

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 21 marzo 2011

Soluzione di alcuni esercizi

1. La retta richiesta passerà per A ed avrà parametri direttori proporzionali ai parametri di giacitura di α, che sono $(1,-1,3)$. Quindi eq. parametriche e cartesiane sono

$$r\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases} \qquad r\colon \begin{cases} 3x - z - 2 = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Se n è la retta per B e perpendicolare ad α, allora $C = n \cap \beta$ è il centro C di Σ. Quindi il raggio R di Σ è dato da $R^2 = \overline{BC}^2 + (\sqrt{6})^2$. Ora

$$n\colon \begin{cases} x = 1+h \\ y = -2-h \\ z = -1+3h \end{cases}$$

che intersecata con β dà $h = 1/2$, quindi $C(3/2, -5/2, 1/2)$ e $\overline{BC} = \sqrt{11/4}$. Segue $R = \sqrt{35/4}$ e Σ: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - z = 0$.