NOME e COGNOME.. **MATRICOLA n**...............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 25 febbraio 2010

1. Dato il piano $\alpha\colon x+y-1=0$ e la famiglia di rette
$$r_k\colon \begin{cases} x-2y-z=1 \\ 2x-kz=1 \end{cases}$$
dire qual è la mutua posizione di α ed r_k per $k=0$.

2. Per tutti i valori di $k\in\mathbb{R}$ tali che α è parallelo ad r, calcolare la distanza tra α ed r.

3. Trasformare (mediante operazioni che lasciano invariato il rango) la seguente matrice in una matrice a scalini, trovandone il rango.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Siano dati i vettori $\vec{u}_1=(1,0,1,0)$, $\vec{u}_2=(0,-1,0,0)$, $\vec{v}_3=(0,0,1,1)$, $\vec{u}_4=(1,0,0,1)$. Si consideri la funzione lineare definita da
$$f(\vec{u}_1)=(1,-1,0,0),\quad f(\vec{u}_2)=(1,1,0,0),\quad f(\vec{u}_3)=(0,1,0,0),\quad f(\vec{u}_4)=(1,1,1,0).$$
Trovare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ relativa alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$.

5. Trovare nucleo ed immagine di f.

6. Sia data la quadrica
$$x^2+2xy+y^2+z^2-2x+y+1=0,$$
trovarne il tipo, una forma canonica, e dire se la forma quadratica associata può provenire da un prodotto scalare.

7. Si consideri il sottospazio $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_3=0,\ x_1-x_4=0\}$. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da vettori di U e di $U^{\perp}$.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 2 febbraio 2010

Soluzioni degli esercizi

1. Per $k = 0$ il piano e la retta r_0 si intersecano nel punto $(1/2, 1/2, -3/2)$, come risulta risolvendo il sistema delle tre equazioni.

2. Cerchiamo valori di k per cui il sistema delle tre equazioni non ha soluzioni. Il determinante della matrice incompleta del sistema è $3k - 2$, che è nullo per $k = 2/3$. Per tale valore si vede facilmente che il sistema non ammette soluzioni, quindi la retta $r_{2/3}$ è parallela ad α. La distanza tra i due insiemi sarà data dalla distanza di un punto qualsiasi di $r_{2/3}$ da α.

3. Posto $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ si ha
$$\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Usando la relazione
$$\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) P^{-1}$$
dove P è la matrice di cambiamento di base
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(si noti che P trasforma componenti rispetto a $\mathcal{B}$ in componenti rispetto a $\mathcal{C}$, dunque P^{-1} trasforma componenti rispetto a $\mathcal{C}$ in componenti rispetto a $\mathcal{B}$) si ha la matrice cercata.

4. Il calcolo si può eseguire con la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ o con la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$. Nel primo caso il calcolo è *routine*, nel secondo caso si vede subito che l'immagine è generata, per esempio, dalle ultime tre colonne. Tuttavia la soluzione che si trova per il nucleo è espressa in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ che si è scelta nel dominio. Ovviamente, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ per il teorema fondamentale.

5. Si vede subito che la quadrica può essere riscritta come $(x + y)^2 + z^2 - 2x + y + 1 = 0$, pertanto ci sono due autovalori di segno uguale ed uno nullo nella forma quadratica; si tratta dunque di un paraboloide ellittico. Ovviamente il risultato segue anche dal procedimento standard.

6. Una base di U è formata dai vettori $(1, 0, -1, 1)$ e $(0, 1, 0, 0)$. Le equazioni
$$(1, 0, -1, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad (0, 1, 0, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$
forniscono una base di $U^{\perp}$. È sufficiente mettere insieme i vettori delle due basi ed applicare Gram–Schmidt per avere il risultato.