NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 30 giugno 2009

1. Sia dato un riferimento cartesiano $RC(Oxyz)$. Trovare equazioni cartesiane della circonferenza passante per i punti $A = (1, 0, -1)$, $B = (-3, 1, 2)$, $C = (-1, -1, 2)$.

2. Con riferimento ai punti del precedente esercizio, trovare l'area del triangolo ABC.

3. Trovare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ kx + ky + z + t = 0 \end{cases}$$

   al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4. Data la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4, 0)$$

   determinare autovalori ed autovettori di f e dire se f è semplice.

5. Trovare una base ortonormale di $\operatorname{Ker} f$ ed una base ortonormale di $\operatorname{Im} f$.

6. Data la conica di equazione

$$\mathcal{C} : 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 3y + 4 = 0$$

   se ne determini il tipo e si calcoli una forma canonica.

7. Giustificate il fatto che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   non sono simili.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 30 giugno 2009

Soluzioni degli esercizi

1. Il centro della circonferenza si trova nel piano π contenente A, B, C, di equazione parametrica
$$(x, y, z) = A + k(B - A) + h(C - A)$$
Inoltre, il centro si trova all'intersezione dei due assi delle corde AB e BC. Il primo asse si trova ricavando l'equazione del piano α perpendicolare ad AB, ed intersecando con π. L'equazione di α si trova osservando che la giacitura è data dal vettore $B - A$ ed il piano passa per il punto medio
$$M_{AB} = \frac{A + B}{2}.$$
Si ragioni in modo analogo per il secondo asse; infine si intersechino i tre piani per trovare il centro della circonferenza. Il raggio è uguale alla distanza del centro da uno dei tre punti dati.

2. I vettori $B-A$ e $C-A$ sono i lati di un parallelogramma la cui area è il doppio dell'area del triangolo cercato. La soluzione è dunque
$$\text{area} = \frac{1}{2}|(B - A) \wedge (C - A)|$$

3. Il sistema omogeneo associato ha rango 2 per $k \neq -1$. Per tali valori si ottengono ∞^2 soluzioni. Queste possono calcolarsi con il metodo di riduzione, notando che non è possibile ricavare x e y in funzione di z e t (o viceversa), ma è possibile ricavare x e z in funzione di y e t, ad esempio. Per $k = -1$ si ha un sistema incompatibile.

4. La matrice della funzione lineare rispetto alla base canonica in dominio e codominio è
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
C'è solo l'autovalore 0 con molteplicità algebrica 4. Ovviamente $\dim V(0) = 1 < 4$ perché $A - 0I = A$ ha rango 3, dunque la funzione non ammette una base di autovettori.

5. Una base di $\operatorname{Ker} f$ è ottenuta risolvendo il sistema $AX = O$; si ottiene il vettore $(1, 0, 0, 0)$; questo costituisce una base ortonormale. Una base di $\operatorname{Im} f$ si trova, per il teorema fondamentale dell'algebra lineare, scegliendo tre colonne indipendenti, ad esempio le ultime tre. Una base fatta da vettori ortonormali si può trovare con il procedimento di Gram–Schmidt, oppure osservando che $\operatorname{Im} f$ è lo spazio generato dai vettori $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^4$, che è ortonormale.

6. La matrice della parte quadratica della conica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Gli autovalori sono 3 e 1, con corrispondenti autovettori normalizzati $1/\sqrt{2}\,(1,1)$ e $1/\sqrt{2}\,(1,-1)$. Le formule per il cambiamento di coordinate sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

   Sostituendo nell'equazione della conica si ha

$$\mathcal{C}\colon 3x'^2 + y'^2 - 2(1/\sqrt{2}\,x' + 1/\sqrt{2}\,y') + 3(1/\sqrt{2}\,x' - 1/\sqrt{2}\,y') + 4 = 0.$$

   Procedendo con il metodo del completamento dei quadrati si giunge ad una forma canonica. Ovviamente la conica è un'ellisse.

7. Le due matrici hanno autovalori diversi (sono gli elementi sulla diagonale), quindi non possono essere matrici simili perché matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, dunque gli stessi autovalori.