NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**..............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra, 5 maggio 2009

1. Sia dato un riferimento cartesiano $RC(Oxyz)$. Date le rette

$$r\colon \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

   si trovino le equazioni della superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare r intorno ad s. Di che superficie si tratta?

2. Con riferimento alle rette del precedente esercizio, trovare almeno una delle bisettrici di r ed s.

3. Studiare la risolubilità del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z - t = k \\ 2x - y + t = 1 \\ 3y - 2z - 3t = 2 \end{cases}$$

   al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono soluzioni, determinarle esplicitamente.

4. Data la funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4, 2x_2 - x_3 + x_4, x_4, x_3)$$

   determinare autovalori ed autovettori di f e dire se f è semplice.

5. Dati i vettori in $\mathbb{R}^4$

$$\vec{u}_1 = (1, 2, -1, 1), \quad \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \vec{u}_3 = (1, 0, -2, -1), \quad \vec{u}_4 = (0, 0, 0, -1),$$

   dimostrare che sono una base di $\mathbb{R}^4$ e trovare la matrice di f del punto precedente rispetto a questa base in dominio e codominio.

6. Trovare una base ortonormale del sottospazio vettoriale $V = \mathcal{L}(\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$.

7. Data la conica di equazione

$$\mathcal{C}\colon 4x^2 + y^2 - 4xy - 6x - 12y + 30 = 0$$

   se ne determini il tipo e si calcoli una forma canonica.

8. Siano X, $Y \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che la matrice $XY^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ ha rango al più uguale a 1.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE
Esame di Geometria e Algebra, 5 maggio 2009

Soluzioni degli esercizi

1. Vettori di direzione delle due rette sono $\vec{r} = (-1, 1, 1)$ e $\vec{s} = (1, 1, 0)$. Le rette sono incidenti in $P = (1, 1, -2)$. Dunque la superficie è un cono di vertice P.

2. La diagonale del rombo che ha per lato i due *versori* (i lati del rombo hanno uguale misura!) corrispondenti a $\vec{r}$ e $\vec{s}$, rispettivamente uguali a

$$\operatorname{vers}\vec{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), \qquad \operatorname{vers}\vec{s} = \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),$$

coincide con la bisettrice dell'angolo formato dai due versori. Tale diagonale è uguale a $\operatorname{vers}\vec{r} + \operatorname{vers}\vec{s}$. Pertanto l'equazione parametrica della retta è

$$(x, y, z) = P + t(\operatorname{vers}\vec{r} + \operatorname{vers}\vec{s}).$$

3. Applicando il metodo di riduzione alla matrice completa del sistema si ha:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & k \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 1-2k \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 1-2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-2k \end{array}\right)$$

e si vede che il sistema è tale che il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta se e solo se $k = 3/2$. In quest'ultimo caso si hanno ∞^2 soluzioni, per le quali si può scrivere

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 5/6 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right),$$

da cui, usando i parametri $z = a$ e $t = b$:

$$(x, y, z, t) = (1/3\,a + 5/6, 1/3(2a + 3b + 2), a, b).$$

4. La matrice della funzione lineare rispetto alla base canonica in dominio e codominio è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono -1 e 2 con molteplicità algebrica 1 e 1 con molteplicità algebrica 2. Risulta:

$$V(-1) = \mathcal{L}((1, -4/11, -6/11, 6/11)), \quad V(2) = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0)), \quad V(1) = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0)),$$

dunque la funzione non ammette una base di autovettori.

5. La matrice P che ha per colonne le componenti dei vettori dati ha determinante -1, dunque i vettori sono una base di $\mathbb{R}^4$. La formula richiesta per il cambiamento di base è $A' = P^{-1}AP$, dove A' è la matrice di f rispetto alla nuova base in dominio e codominio. Risulta
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
e
$$A' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & -4 \\ -4 & 7 & 1 & 7 \\ -5 & 5 & 1 & 6 \\ 11 & -9 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

6. Si applica il procedimento di Gram-Schmidt.

7. La matrice della parte quadratica della conica è
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
Gli autovalori sono 0 e 5, con corrispondenti autovettori normalizzati $1/\sqrt{5}\,(1, 2)$ e $2/\sqrt{5}\,(1, -1/2)$. Le formule per il cambiamento di coordinate sono
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
Sostituendo nell'equazione della conica si ha
$$\mathcal{C}\colon 5y'^2 - 6(1/\sqrt{5}\,x' + 2/\sqrt{5}\,y') - 12(2/\sqrt{5}\,x' - 1/\sqrt{5}\,y') + 30 = 0.$$
Procedendo con il metodo del completamento dei quadrati (solo su y'!) si giunge ad una forma canonica. Ovviamente la conica è una parabola.

8. La riga i-esima della matrice XY^T è uguale a x_iY^T, dove x_i è la componente i-esima del vettore X. Dunque tutte le righe sono proporzionali tra di loro, pertanto il rango non può essere maggiore di 1.