NOME e COGNOME.. **MATRICOLA n**..............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra, 4 marzo 2009

1. Sia dato un riferimento cartesiano $RC(Oxyz)$. Date le rette
$$r\colon \begin{cases} x+y=2 \\ y-z=3 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$$
trovare le mutue posizioni e la distanza tra r ed s.

2. Scrivere le equazioni della circonferenza passante per $A(1,0,1)$ e tangente in $O(0,0,0)$ alla retta $x=y=z$.

3. Dire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i vettori
$$(k,1,k-1), \quad (-2,k+3,-k-5), \quad (k+1,0,k+1)$$
sono indipendenti.

4. Si dica per quale motivo la seguente posizione
$$f(\vec{u}_1)=(2,4,0,2), \quad f(\vec{u}_2)=(0,0,0,0),$$
$$f(\vec{u}_3)=(1,0,0,-1), \quad f(\vec{u}_4)=(-1,0,0,-1)$$
dove $\vec{u}_1=(1,2,0,1)$, $\vec{u}_2=(0,1,1,0)$, $\vec{u}_3=(1,0,0,1)$, $\vec{u}_4=(1,0,0,-1)$, definisce un'unica funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, e se ne trovi la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_4}^{\mathcal{C}_4}(f)$ rispetto alla base canonica.

5. Si trovino autovalori ed autovettori della precedente funzione lineare, dicendo se è semplice.

6. Si dimostri che se una matrice A è tale che $A^2=O$ allora A non è invertibile.

7. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri la funzione
$$g:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}:$$
$$(\vec{x},\vec{y})\mapsto 2x_1y_1+3x_2y_2-\frac{1}{2}x_3y_4-\frac{1}{2}x_4y_3+x_3y_3+x_4y_4\,.$$
Dimostrare che g è un prodotto scalare.

8. In $\mathbb{R}^4$, dato $V=\mathcal{L}((1,1,0,-1),(-2,0,1,0))$, si trovi $V^\perp$ *rispetto al prodotto scalare g del precedente esercizio.*

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE
Esame di Geometria e Algebra, 23 luglio 2003

Soluzioni degli esercizi

1. Vettori di direzione delle due rette sono $\vec{r} = (-1, 1, 1)$ e $\vec{s} = (1, 1, 1)$, dunque le rette non sono parallele perché i vettori non sono proporzionali. Inoltre le rette non sono incidenti perché il sistema delle loro equazioni è incompatibile. Pertanto le rette sono sghembe. Seguendo un metodo noto, si giunge al sistema lineare

$$\begin{cases} (-t+2-t', t-t', t-3-t') \cdot (-1,1,1) = 0 \\ (-t+2-t', t-t', t-3-t') \cdot (1,1,1) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $(t, t') = (7/4, 1/4)$. In corrispondenza di questi valori si trovano i punti $R = (1/4, 7/4, -5/4)$ ed $S = (1/4, 1/4, 1/4)$ che individuano il segmento perpendicolare ad entrambe le rette, di lunghezza minima tra le due rette.

2. La circonferenza è contenuta nel piano π passante per A e per la retta data, di equazione cartesiana $\pi\colon\ -x+z=0$. Il centro della circonferenza si trova sul piano passante per O e perpendicolare alla retta data, di equazione $x+y+z=0$. L'intersezione di questi due piani è la retta di equazioni

$$\begin{cases} -x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

dunque il centro è del tipo $C(t, -2t, t)$. Si ha, inoltre, $R = \|CO\| = \sqrt{6t^2}$. Chiedendo che la sfera di centro C e di raggio R passi per A si ottiene l'equazione

$$(1-t)^2 + (0+2t)^2 + (1-t)^2 = 6t^2,$$

che ha soluzione $t = 1/2$. La circonferenza cercata è, pertanto,

$$\begin{cases} -x+z=0 \\ (x-1/2)^2 + (y+1)^2 + (z-1/2)^2 = 3/2 \end{cases}$$

3. Si tratta di risolvere il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -2 & k+1 & 0 \\ 1 & k+3 & 0 & 0 \\ k-1 & -k-5 & k+1 & 0 \end{array}\right)$$

vedendo quando questo ammette un'unica soluzione. Operando per righe si ottiene, dopo lo scambio delle prime due righe (per comodità)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+3 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2-3k-2 & k+1 & 0 \\ 0 & -k^2-3k-2 & k+1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+3 & 0 & 0 \\ 0 & (k+1)(k+2) & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dunque, il sistema ammette sempre infinite soluzioni, pertanto i vettori sono sempre dipendenti.

4. La matrice che per colonne i vettori $\vec{u}_1$,...,$\vec{u}_4$ ha determinante diverso da 0, dunque $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_4\}$ è una base. Un risultato di teoria afferma che è univocamente determinata una funzione lineare una volta che siano assegnati i suoi valori sulla base. Pertanto f è univocamente determinata. Essendo per definizione

$$\mathcal{M}^{\mathcal{C}_4}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ed essendo $X_{\mathcal{C}_4} = PX_{\mathcal{B}}$, ove P è la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$, si ha

$$\mathcal{M}^{\mathcal{C}_4}_{\mathcal{C}_4}(f) = \mathcal{M}^{\mathcal{C}_4}_{\mathcal{B}}(f)P^{-1}.$$

Si noti che

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Dunque il risultato è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{C}_4}_{\mathcal{C}_4}(f)$ è

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$$

che ha le radici reali 2 e 0 con molteplicità algebriche (e quindi geometriche) 1. Si ha

$$V(0) = \mathcal{L}(\vec{u}_2), \quad V(2) = \mathcal{L}(\vec{u}_1),$$

dunque f non è un endomorfismo semplice.

6. Per assurdo, se A fosse invertibile si avrebbe $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$, ma $A^2 \cdot (A^2)^{-1} = O$, dunque A non può essere invertibile.

7. L'unica verifica che presenta qualche difficoltà è il fatto che g sia definita positiva. La matrice di g rispetto alla base canonica è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_4}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha autovalori 2, 3, 1/2, 3/2, dunque è definita positiva. Alternativamente, si può osservare che la forma quadratica associata è del tipo $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{1}{2}(x_3 + x_4)^2$, che si annulla solo per $(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

8. Basta risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} g((1,1,0,-1),\vec{x}) = 0, \\ g((-2,0,1,0),\vec{x}) = 0 \end{cases}$$

dove $\vec{x} \in V^{\perp}$. Il precedente sistema è

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 0 \\ -4x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$