NOME e COGNOME.. **MATRICOLA n**...............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 28 giugno 2010

1. Dati la retta r ed il piano α:

$$r\colon \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad \alpha\colon x + y + 2z + 3 = 0$$

trovare le equazioni delle sfere di raggio $R = 1$, aventi centro su r e tangenti ad α.

2. Determinare equazioni cartesiane della superficie ottenuta dalla rotazione di s intorno ad r, dove s è la retta

$$s\colon (x, y, z) = (-1/3, -2/3, -1) + t(1, 1, 2).$$

3. Dire quante soluzioni ammette, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-k & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e trovare le eventuali soluzioni.

4. Si consideri la funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$f(\vec{e}_1) = (1, -1, 0, 0), \quad f(\vec{e}_2) = (1, -1, -1, 1), \quad f(\vec{e}_3) = (0, 0, 1, -1), \quad f(\vec{e}_4) = (0, 0, 0, 0),$

dove $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Trovare nucleo ed immagine di f.

5. Con riferimento al precedente esercizio, trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da vettori del sottospazio $\operatorname{Ker} f$ e da vettori del sottospazio $\operatorname{Ker} f^{\perp}$.

6. Si consideri la forma bilineare

$$\beta\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto X^T A Y$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dica se β è un prodotto scalare.

7. Classificare la quadrica $\beta(X, X) = 1$ indicandone una forma canonica.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 27 aprile 2010

Soluzioni degli esercizi

1. Si ha $r \cap \alpha = \{(-1/3, -2/3, -1)\}$. Pertanto ci saranno due sfere tangenti al piano α ed aventi raggio 1. Una rappresentazione parametrica di r è

$$r\colon (x, y, z) = (-1/3, -2/3, -1) + t(1, 2, 3/2)$$

ed i centri delle sfere sono dati dai punti di r con il valore del parametro t ottenuto dalla soluzione di

$$d(P, \alpha) = \frac{|-1/3 + t - 2/3 + 2t - 1 + 3/2\ t|}{\sqrt{1+1+4}} = 1,$$

che è

$$t_1 = \frac{2}{9}(2+\sqrt{6}) \quad t_2 = \frac{2}{9}(2-\sqrt{6}).$$

2. La superficie è un cono, perché le due rette si intersecano nello stesso punto di α. L'equazione del piano ortogonale ad r e passante per il generico punto di s è

$$(x + 1/3 - t) + 2(y + 2/3 - t) + 3/2(z + 1 - 2t) = 0$$

L'equazione della sfera passante per il generico punto di s ed avente centro in un generico punto di r, ad esempio $(-1/3, -2/3, -1)$, è

$$(x + 1/3)^2 + (y + 2/3)^2 + (z + 1)^2 = t^2 + t^2 + (2t)^2.$$

Mettendo a sistema le precedenti equazioni ed usando la prima per eliminare t nella seconda si ottiene l'equazione cartesiana.

3. Con i consueti passaggi si arriva al sistema lineare (che la le stesse soluzioni di quello di partenza!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-k & 0 \\ 0 & 3 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & -2k/3 + k^2/3 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per $k = 0$ la matrice incompleta ha rango 2 mentre la matrice completa ha rango 3, quindi non ci sono soluzioni. Per $k \neq 0$ la matrice incompleta è a scalini con 3 scalini non nulli, quindi ci sono ∞^1 soluzioni. In particolare si può richiedere che il parametro sia z, in tal caso risulta

$$(x, y, t) = \left(1 + \frac{2k-1}{3}z, \frac{k-2}{3}z, -\frac{1}{k} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{k}{3}\right) z\right)$$

4. La matrice di f nella base canonica in dominio e codominio è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e risolvendo $AX = 0$ si ottiene $\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}(\{(-1,1,1,0),(0,0,0,1)\})$. Dunque $\dim \operatorname{Im} f = 2$ dal teorema fondamentale; basterà scegliere come base di $\operatorname{Im} f$ due colonne indipendenti di A, per esempio le prime due o la prima e la terza.

5. I vettori della base di $\operatorname{Ker} f$ di cui sopra sono ortogonali, e si possono facilmente normalizzare. Per quanto riguarda una base di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$, è sufficiente considerare il sistema

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

che, risolto, fornisce i vettori $(1,1,0,0)$ e $(0,1,-1,0)$ come base di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$. Basta ortonormalizzare questi due vettori con Gram-Schmidt e unire il risultato con la precedente base ortonormale per risolvere l'esercizio.

6. β ha due autovalori positivi ed uno negativo: 3, 1, -4, dunque non rappresenta un prodotto scalare.

7. La forma quadratica associata a β ha gli autovalori di cui sopra; con questo si può dedurre che la quadrica sarà un'iperboloide. In ogni caso dalla teoria si deduce senza alcun calcolo la forma canonica della quadrica:

$$3x'^2 + y'^2 - 4z'^2 = 1.$$