NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 20 luglio 2009

1. Dati la retta r ed il piano α

$$r\colon \begin{cases} x-1=0, \\ y-z-1=0, \end{cases} \quad \alpha\colon x-y-z=0,$$

   trovare equazioni della retta s contenuta in α, incidente r e passante per $O=(0,0,0)$.

2. Con riferimento al precedente esercizio, dire se esiste una retta contenuta in α e perpendicolare ed incidente r; in caso affermativo trovarne le equazioni.

3. Trovare il rango della seguente matrice al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$M = \begin{pmatrix} k & k-1 & 2(k-1) & -k \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Data la funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{C}_4$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_4}^{\mathcal{C}_4}(f) = A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   trovarne una base del nucleo e dell' immagine.

5. Trovare autovalori ed autovettori di f e dire se f è semplice.

6. Data la quadrica di equazione

$$\mathcal{C}\colon 2xy + z^2 - x + 2z + 4 = 0$$

   se ne determini il tipo e si calcoli una forma canonica.

7. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, giustificare il fatto che $A^T A$ rappresenta una forma bilineare simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^m$. È vero che tale forma è non degenere per qualsiasi scelta di A? È vero che è semidefinita positiva per qualsiasi scelta di A?

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE
Esame di Geometria e Algebra N.O., 20 luglio 2009

Soluzioni degli esercizi

1. Il sistema formato dalle equazioni di α e r ha come risultato il punto $P = (1, 1, 0)$, dunque α ed r sono incidenti in P. Pertanto la retta cercata sarà la retta passante per i punti P e O.

2. I vettori paralleli ad α sono dati dalla soluzione del sistema omogeneo associato, ossia dall'equazione di α stessa. Essi sono descritti da $(h + k, h, k)$ al variare di h, $k \in \mathbb{R}$. Un vettore di direzione di r è $(0, 1, 1)$. Un vettore di direzione della retta cercata sarà soluzione dell'equazione
$$(h + k, h, k) \cdot (0, 1, 1) = 0,$$
per esempio il vettore $(0, 1, -1)$. Dunque la retta cercata ha equazione parametrica $(x, y, z) = P + t(0, 1, -1)$.

3. Scambiando la prima riga con l'ultima e procedendo con il metodo di riduzione a scalini si ottiene la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{-5k+5}{-2} & -2k+2 \end{pmatrix}$$
che ha rango 3 per $k \neq 1$ e rango 2 per $k = 1$.

4. Il sistema lineare $AX = 0$ ha come soluzioni $\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}((1, 1, 1, 1))$. Per il teorema fondamentale dell'algebra lineare, $\operatorname{Im} f$ sarà generato da tre colonne indipendenti di A, per esempio le prime tre (dimostrare l'indipendenza!).

5. Gli autovalori di f sono -2 con molteplicità algebrica 2, -4 con molteplicità algebrica 1 e 0 con molteplicità algebrica 1. Si ha $V(-2) = \mathcal{L}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$ e $V(-4) = \mathcal{L}((1, -1, 1, -1))$. Ovviamente $V(0) = \operatorname{Ker} f$.

6. La forma quadratica associata alla quadrica ha la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
che ha due autovalori positivi ed uno negativo. La conica è pertanto un'iperboloide. Si proceda come nell'esercizio 4.12 delle dispense per trovare la forma canonica.

7. La matrice $A^T A \in \mathbb{R}^{m,m}$ è simmetrica: $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, dunque rappresenta una forma bilineare simmetrica $\beta \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Tuttavia la forma non è degenere in generale. Sia infatti $X \in \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\}$ tale che $AX = 0$ (questo succede ogni volta che la funzione lineare definita dalla matrice A ha un nucleo diverso dal solo vettore nullo, come ad esempio per la matrice nulla). Allora $X^T A^T AX = 0$. Tuttavia, $X^T A^T AX = \|AX\|^2$, dunque la forma bilineare simmetrica β è semidefinita positiva per qualunque scelta di A.