NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 13 gennaio 2010

1. Siano dati il piano α e la retta r:
$$\alpha\colon x - 2y + z = 1, \quad r\colon \begin{cases} 2x - 2y + z = 0, \\ x + y - 2z = 1. \end{cases}$$
Si trovi la retta s passante per $P = (2, 2, 0)$, incidente la retta r e parallela ad α.

2. Con riferimento al punto precedente, si trovi l'equazione cartesiana della sfera avente centro in $Q = \alpha \cap r$ e tangente alla retta s.

3. Sia $f_h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita, al variare di $h \in \mathbb{R}$ da
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_1 + hx_2 - 2x_4, x_1 + (h + 1)x_4, -2x_2 + (h + 1)x_4).$$
Trovare nucleo ed immagine di f_h al variare di $h \in \mathbb{R}$ e dire per quali valori di h f_h non è un isomorfismo.

4. Trovare una base $\mathcal{B}$ di autovettori dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata nella base canonica $\mathcal{C}$ di R^3 dalla matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Trovare, inoltre, il cambiamento di base P tale che $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}P$.

5. Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$
$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 = 0,\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0\}.$$
Si determini una base del sottospazio $U^\perp$ (rispetto al prodotto scalare euclideo), e si trovi una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da vettori di U e di $U^\perp$.

6. Data la famiglia di quadriche $\Sigma_k\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$$\Sigma_k\colon x^2 + 2y^2 + z^2 + 2kxz = 4$$
si trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui Σ_k è un ellissoide.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 13 gennaio 2010

Soluzioni degli esercizi

1. La retta r ha rappresentazione parametrica

$$r\colon \quad x = \frac{3t+2}{4}, \quad y = \frac{5t+2}{4}, \quad z = t.$$

Dunque la retta s ha la forma

$$s\colon (x,y,z) = P + k\left(\left(\frac{3t+2}{4}, \frac{5t+2}{4}, t\right) - P\right).$$

Il vettore di direzione $\vec{s}$ della retta s deve perpendicolare alla giacitura di α, dunque:

$$\left(\left(\frac{3t+2}{4}, \frac{5t+2}{4}, t\right) - P\right) \cdot (1,-2,1) = 0$$

che dà $t = 2$.

2. Si ha $Q = \alpha \cap r = (-1,-2,-2)$. Il raggio R della sfera è uguale alla distanza di s da α; essendo s parallela ad α basterà calcolare la distanza di un punto qualunque di s, ad esempio P, da α. Si ha

$$d(P,\alpha) = \frac{|2-4-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

La sfera cercata ha equazione

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 3/2.$$

3. La matrice di f_h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & h+1 \\ 0 & -2 & 0 & h+1. \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice è $-h^2+h+6$. Se $h \neq 3$ e $h \neq -2$ f_h è un isomorfismo, dunque $\operatorname{Ker} f_h = \{\vec{0}\}$ e $\operatorname{Im} f_h = \mathbb{R}^4$. La funzione f_h non è un isomorfismo se e solo se $h = -3$ o $h = -2$, per tali valori si verifica facilmente che le prime tre colonne della matrice sono indipendenti, dunque costituiscono una base di $\operatorname{Im} f_3$ o $\operatorname{Im} f_{-2}$. Per il teorema fondamentale il nucleo avrà dimensione 1 (trovarne una base).

4. Gli autovalori di A sono 2 e -1 con molteplicità algebrica rispettiva 1 e 2. Gli autospazi sono
$$V(2) = \mathcal{L}((1,1,1)), \quad V(-1) = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1)).$$
Dunque la matrice del cambiamento di base è
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Il sistema che definisce U ha rango 2 ed i vettori dei coefficienti delle due equazioni sono ortogonali ai vettori di U; dunque
$$U^{\perp} = \mathcal{L}((0,1,-2,0),(1,2,0,-1)).$$
Risolvendo il sistema si trova
$$U = \mathcal{L}((-4,2,1,0),(1,0,0,1)).$$
Si applichi il metodo di Gram–Schmidt per ottenere il risultato cercato.

6. La matrice di Σ_k ha polinomio caratteristico
$$p(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - k^2(2-\lambda) = (2-\lambda)((1-\lambda)-k)((1-\lambda)+k).$$
Le radici del polinomio caratteristico sono 2 e $1 \pm k$. Queste radici sono entrambe positive se e solo se sono soddisfatte le disequazioni $1+k>0$ e $1-k>0$, ossia $-1<k<1$. In questo caso Σ_k è un ellissoide.