NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 27 aprile 2010

1. Dati una retta r ed una famiglia di piani α_k:

$$r\colon \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} \qquad \alpha_k\colon 2x + 2y + k = 0$$

   dire qual è la mutua posizione di r ed α_k.

2. Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il piano α_k ha distanza uguale a 1 dalla retta r.

3. Trovare il rango della seguente matrice al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Si consideri la funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(\vec{e}_1) = (1,1,0,0), \quad f(\vec{e}_2) = (1,1,1,1), \quad f(\vec{e}_3) = (0,1,0,1), \quad f(\vec{e}_4) = (0,1,1,0),$$

   dove $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Trovare nucleo ed immagine di f.

5. Si trovino autovalori ed autospazi di f specificando se la f è un endomorfismo semplice.

6. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0,\ x_1 - x_4 = 0\}, \quad W = \mathcal{L}(\{(1,1,0,1), (0,0,1,0)\}).$$

   Trovare una base di $U \cap W$ e $U + W$, e dire se esiste una base di $\mathbb{R}^4$ formata da vettori di U e di W.

7. Con riferimento al precedente esercizio, si trovi una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare standard, formata dai sottospazi $U \cap W$ e $(U \cap W)^\perp$.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 27 aprile 2010

Soluzioni degli esercizi

1. Il sistema formato dalle equazioni della retta e del piano è
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -k \end{pmatrix}$$
e dopo il procedimento di riduzione a scalini si ottiene la forma equivalente
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2-k \end{pmatrix}$$
che ammette soluzioni se e solo se $k = 2$. Si conclude che per $k \neq 2$ la retta ed il piano sono paralleli, mentre per $k = 2$ la retta è contenuta nel piano.

2. Preso un punto qualunque di r, ad esempio $P_0 = (1, -2, 0)$, basta risolvere l'equazione
$$\frac{|2 - 4 + k|}{\sqrt{4+4}} = 1.$$
Ovviamente ci sono due soluzioni.

3. Il metodo di riduzione a scalini fornisce
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
Per $\lambda \neq 1$ la matrice è a scalini ed ha 3 righe non nulle, dunque ha rango 3, per $\lambda = 1$ si può proseguire il metodo e si ottiene comunque una matrice a scalini con tre righe non nulle, di rango 3.

4. La matrice di f rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ è
$$\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Il determinante della matrice è diverso da 0, dunque la f è un isomorfismo, per il quale $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$.

5. La matrice di f è simmetrica rispetto alla base ortonormale $\mathcal{C}$, dunque f è un endomorfismo semplice. Gli autovalori di f sono ± 1 e $1 \pm \sqrt{3}$. I vettori che generano i corrispondenti autospazi sono $(1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, 0, 1, -1)$, $(1, -\sqrt{3}, 1, 1)$, $(1, \sqrt{3}, 1, 1)$.

6. Una base di U è formata dai vettori $(1,0,-1,1)$ e $(0,1,0,0)$. Equazioni cartesiane di W sono ottenute eliminando i parametri da

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = k(1,1,0,1) + h(0,0,1,0).$$

Ovviamente servono due equazioni indipendenti perché $2 = \dim \mathbb{R}^4 - \dim W = 4-2 = 2$ (ripassare il Teorema di Rouché–Capelli!). Tali condizioni sono $x_1 = x_2$ e $x_2 = x_4$. Unendo tali equazioni con le equazioni di U si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_4 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha ∞^1 soluzioni generate da, ad esempio, $(1,1,-1,1)$. La relazione di Grassmann fornisce $\dim U+V = 3$, pertanto i 4 vettori unione delle basi di U e V sono dipendenti, ma da questi si può estrarre una base di $U+V$ composta, ovviamente, da 3 vettori.

7. Il vettore $(1,1,-1,1)$ costituisce, *dopo essere stato normalizzato*, una base ortonormale di $U \cap W$. L'equazione di $(U \cap W)^\perp$ è

$$\frac{1}{2}(1,1,-1,1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

che costituisce un sistema di equazioni lineari in 4 incognite, di rango 1, con ∞^3 soluzioni. Si applichi il procedimento di Gram–Schmidt su una base dello spazio delle soluzioni per ottenere, dopo l'unione con la base ortonormale di $U \cap W$, una base ortonormale di tutto lo spazio $\mathbb{R}^4$.