NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 25 ottobre 2010

1. Data la retta $r\colon x-3y-z-2=0,\ x-z+1=0$ e la sfera $S\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2=0$ si dica se la retta r interseca la sfera, è tangente alla sfera, è esterna alla sfera.

2. Si scrivano le equazioni dei piani contenenti la retta r e tangenti alla sfera S dell'esercizio precedente.

3. Dire quante soluzioni ammette il seguente sistema lineare al variare di $h \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} hx + y + hz = h \\ 2x + (1-h)z = 3h \\ 2hx + y + hz = h - h^2 \end{cases}$$

4. Si consideri la base $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 2, 0)$ di $\mathbb{R}^3$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da
$$f(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1, \quad f(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2, \quad f(\vec{v}_3) = 8\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3.$$
Si trovi la matrice di f rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

5. Con riferimento all'esercizio precedente si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f.

6. Con riferimento all'esercizio 4, si trovi la proiezione ortogonale del vettore $\vec{v}_3$ sullo spazio $V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 25 ottobre 2010

Soluzioni degli esercizi

1. Scrivere la retta in forma parametrica, e sostituire le coordiante in funzione di t nell'equazione della sfera. Risolvendo rispetto a t si trova il numero dei punti di intersezione della retta con la sfera.

2. Basta calcolare l'equazione del fascio di piani per la retta e cercare i piani che hanno distanza dal centro della sfera uguale al raggio della sfera.

3. Scambiando la seconda riga con la prima, con i soliti passaggi si riconduce il sistema al sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-h \\ 0 & 1 & (h^2+h)/2 \\ 0 & 0 & (h^2-h)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3h \\ -3/2\,h^2+h \\ -5/2\,h \end{pmatrix}$$

   da cui risulta faclmente che per $h \neq 0$ e $h \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione, per $h = 0$ il sistema ha ∞^1 soluzioni e per $h = 1$ il sistema non ha soluzioni.

4. Si possono effettuare i calcoli indifferentemente su $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ o $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, dove $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e $\mathcal{C}$ è la base canonica. Gli autovalori sono -2 (m.a. 1) e 2 (m.a. 2), e $\dim V(2) = 2$, cosicché è possibile trovare una base di autovettori.

5. Banale.

6. La proiezione ortogonale si trova calcolando una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ con i primi due vettori in V. Se $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ è una tale base allora la proiezione ortogonale di $\vec{v}_3$ su V è il vettore $(\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_1)\vec{w}_1 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2)\vec{w}_2$.