NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 28 settembre 2010

1. Si considerino la retta s ed il piano α:
$$s\colon \begin{cases} x = z-1, \\ y = z-2 \end{cases} \qquad \alpha\colon x - y + 3z = 0.$$
Determinare equazioni della retta r proiezione ortogonale della retta s su α.

2. Con riferimento al precedente esercizio, trovare l'equazione della superficie generata dalla rotazione di s intorno ad r. Di che superficie si tratta?

3. Sia dato il sistema di equazioni lineari $AX = B$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ k & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}.$$
e k, $h \in \mathbb{R}$ sono due parametri. Calcolare le soluzioni del sistema lineare per $k = 2$, $h = -2$.

4. Con riferimento all'esercizio precedente, dire per quali valori di k e di h il sistema lineare ammette soluzioni.

5. Si consideri l'endomorfismo
$$f_k\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4, x_2 + 2x_4, (k^2-1)x_1 - x_3, -x_4)$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo è semplice.

6. Si consideri $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare standard, e siano dati i vettori $\vec{u}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\vec{u}_2 = (-1, -1, 0, -1)$, $\vec{u}_3 = (3, 5, -2, 1)$. Si trovi una base di $V^\perp$, dove $V = \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\})$.

7. Determinare il piano tangente alla quadrica
$$\mathcal{C}\colon x^2 + y^2 - 2z^2 + 3y - 5 = 0$$
nel punto $P = (1, 1, 0)$. Di che tipo è la quadrica?

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 28 settembre 2010

Soluzioni degli esercizi

1. La retta richiesta è l'intersezione del piano β contenente s e perpendicolare ad α con α stesso. Si ha l'equazione parametrica
$$\beta\colon (x, y, z) = (-1, -2, 0) + t(1, 1, 1) + k(1, -1, 3)$$
da cui, eliminando i parametri, $\beta\colon -2x + y + z = 0$ ed $r = \alpha \cap \beta$.

2. La retta r è incidente alla retta s nel punto $\{P_0\} = \alpha \cap s$, e risulta $P_0 = (-4/3, -7/3, -1/3)$. Pertanto la superficie è un cono di vertice P_0.

3. Il sistema ammette ∞^2 soluzioni.

4. Dopo i consueti passaggi del metodo di riduzione, si giunge alla matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3(k-2) & -3(k-2) & -3(k-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h+2 \end{pmatrix}$$
(si noti che dopo aver operato con la seconda riga sulla terza e la quarta bisogna scambiare la treza riga con la quarta per giungere alla forma a scalini). Dunque il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta se e solo se $h = -2$.

5. Si ha $|A_k - \lambda I| = (\lambda + k)(\lambda - k)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$, quindi gli autovalori sono $\lambda = \pm 1$ e $\lambda = \pm k$. Se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, gli autovalori sono distinti ed f_k è semplice. Restano da esaminare i casi $k = \pm 1$. Si osservi che $f_1 = f_{-1}$, quindi basta esaminare solo f_1. Per $k = 1$ si ha $\lambda = 1$ con molteplicità 2 e $\lambda = -1$ con molteplicità 2. Ora
$$V(1) = \operatorname{Ker}(f_1 - I) = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 3x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \,\} = \mathcal{L}(\vec{e}_1),$$
dove $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$. Poiché $\dim V(1) = 1 \neq 2$, gli endomorfismo f_1 ed f_{-1} non sono semplici.

6. Si osservi innanzitutto che i tre vettori dati non sono indipendenti: una base di V è data da $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Lo spazio $V^\perp$ si trova come soluzione del sistema di equazioni lineari $\vec{x} \cdot \vec{u}_1 = 0$, $\vec{x} \cdot \vec{u}_2 = 0$.

7. L'equazione del piano cercato si trova calcolando le derivate parziali del polinomio $x^2 + y^2 - 2z^2 + 3y - 5$, uguali a $(2x, 2y + 3, -4z)$, e sostituendo le coordinate di P. Si ottiene il vettore $(2, 5, 0)$ che è il vettore ortogonale al piano cercato, che passa per P. La quadrica è un'iperboloide, una traslazione che elimina il termine di primo grado può rivelare quante siano le sue falde.