NOME e COGNOME.. MATRICOLA n...............

Facoltà di Ingegneria Industriale

Esame di Geometria e Algebra, 16 maggio 2011

1. In un riferimento cartesiano $Oxyz$ sia data la sfera di equazione

$$\Sigma\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 8.$$

   Si trovino le equazioni dei piani paralleli al piano $\alpha\colon x - 2y + z + 1 = 0$ e tangenti alla sfera.

2. Con riferimento al punto precedente, si dimostri che il piano α interseca la sfera in una circonferenza e se ne calcoli il raggio.

3. Si risolva il sistema di equazioni lineari

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, dove

$$\vec{v}_1 = (0, 1, -1, 0),\ \vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0),\ \vec{v}_3 = (0, 0, 1, 0),\ \vec{v}_4 = (0, 0, 0, -1),$$

   riferiti alla base canonica $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo così definito

$$f(\vec{v}_1) = \vec{e}_2,\ f(\vec{v}_2) = \vec{e}_1,\ f(\vec{v}_3) = \vec{e}_3,\ f(\vec{v}_4) = -\vec{e}_4.$$

   Trovare la matrice $M = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

5. Trovare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$ sul sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ definito da

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 - x_4 = 0,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

6. Si trovi una forma canonica della quadrica

$$\Sigma\colon 3x^2 + 2y^2 + 2xz + 3z^2 - 4 = 0$$

   e se ne determini il tipo.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.