NOME e COGNOME.. **MATRICOLA n**...............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 9 novembre 2010

1. In un riferimento cartesiano $Oxyz$ siano date la retta r ed il piano α di equazioni
$$r\colon \begin{cases} x-y+z-1=0, \\ x+y-z=0, \end{cases} \qquad \alpha\colon 2x+y-z+1=0.$$
Verificare che r ed α sono paralleli e trovare la distanza tra di essi.

2. Con riferimento ai dati dell'esercizio precedente, determinare il centro ed il raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\mathcal{S}\cap\alpha$, dove
$$\mathcal{S}\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0.$$

3. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $\vec{u}=(k,-1,1)$, $\vec{v}=(3,-3,3k)$, $\vec{w}=(1,-k,k)$. Si trovino i valori di $k\in\mathbb{R}$ tali che il vettore $\vec{x}=(1,-1,1)$ sia combinazione lineare di $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.

4. Data la funzione lineare $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+3x_2,x_2,3x_3+x_4,x_3+3x_4)$ si calcolino autovalori ed autovettori di f e si dica se f è semplice.

5. in $\mathbb{R}^4$ dati i vettori $\vec{v}_1=(1,2,-1,0)$, $\vec{v}_2=(0,-1,-1,2)$ si calcoli una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ tale che i primi due vettori formino una base ortonormale di $V=\mathcal{L}(\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\})$.

6. Dopo aver verificato che la curva $\mathcal{C}\colon x^2-xy-x-y=0$ un'iperbole, se ne determini una forma canonica.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 9 dicembre 2010

Soluzioni di alcuni esercizi

1. I parametri direttori (l, m, n) di r sono proporzionali a $(0, 1, 1)$, mentre i parametri di giacitura (a, b, c) di α sono proporzionali a $(2, 1, -1)$. Poich $al + bm + cn = 0$, segue che r ed α sono paralleli. Se A un fissato punto di r, allora $d(r, \alpha) = d(A, \alpha)$. Se $A(1/2, -1/2, 0)$ si ha
$$d(A, \alpha) = \frac{3}{2\sqrt{6}}.$$

2. Il centro C ed il raggio R della sfera $\mathcal{S}$ sono $C(1, -1, 0)$ ed $R = 1$. Se C' il centro di $\mathcal{C}$ ed R' il suo raggio, allora
$$\|\vec{CC'}\| = d(C, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad R' = \sqrt{1 - \frac{4}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
la retta per C ed ortogonale ad α ha equazioni parametriche $x = 2t + 1$, $y = t - 1$, $z = -t$, quindi $C'(1/3, -4/3, 1/3)$.