

NOME e COGNOME..... MATRICOLA n.....

Facoltà di Ingegneria Industriale

Esame di Geometria e Algebra, 7 luglio 2011

1. In un riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(Oxyz)$ si considerino la sfera Σ e la retta r di equazioni

$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 0, \quad r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Determinare il centro ed il raggio di Σ .

2. Trovare i piani perpendicolari alla retta r e che tagliano Σ in una circonferenza di raggio 2.
3. Si consideri lo spazio vettoriale \mathbb{R}^4 con il prodotto scalare standard. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, dove

$$\vec{v}_1 = (0, 1, -1, 0), \quad \vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{v}_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \vec{v}_4 = (0, 0, 0, -1),$$

riferiti alla base canonica $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo così definito

$$f(\vec{v}_1) = \vec{e}_2, \quad f(\vec{v}_2) = \vec{e}_1, \quad f(\vec{v}_3) = \vec{e}_3, \quad f(\vec{v}_4) = -\vec{e}_4.$$

Trovare la matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$.

4. Trovare nucleo ed immagine dell'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ con matrice, rispetto alla base canonica \mathcal{C} di \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1-b & 0 & 2 \\ b-1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Per $b = 0$ si dica se la precedente applicazione lineare è un endomorfismo semplice.
6. Trovare una base ortonormale di \mathbb{R}^4 (rispetto al prodotto scalare standard) formata da vettori di U e di U^\perp , dove

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 0, \quad 2x_2 - x_4 = 0\}.$$

7. Data l'applicazione $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1 y_2 + 2x_1 y_3 + 2x_3 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2,$$

si dica se g è bilineare, simmetrica e definita positiva.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.