NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**..............

FACOLTA' DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 14 luglio 2010

1. Si considerino il punto $A(2,-1,4)$, la retta s ed il piano α:

$$s\colon \begin{cases} x = z-1, \\ y = z-2 \end{cases} \qquad \alpha\colon x - y + 3z = 0.$$

Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per A ed ortogonale ad α.

2. Con riferimento al precedente esercizio, dimostrare che le rette r ed s sono sghembe e determinare la minima distanza tra esse.

3. Dato il punto $A(2,-1,4)$ e la curva $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t+1 \\ z = t-1 \end{cases}$$

trovare equazioni parametriche della curva $\mathcal{C}'$ proiezione di $\mathcal{C}$ dal punto A sul piano α.

4. Dati i vettori $\vec{u}_1 = (1,1,-1,2)$, $\vec{u}_2 = (-1,0,1,1)$, $\vec{u}_3 = (2,1,0,-1)$, dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $w = (k,0,2,-2)$ appartiene al sottospazio $V = \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\})$.

5. Data l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con matrice nella base canonica in dominio e codominio data da

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_4}^{\mathcal{C}_4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare nucleo e immagine di f e dire se f è un endomorfismo semplice.

6. Dato il sottospazio $U = \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$, dove $\vec{u}_1 = (1,1,-1,2)$, $\vec{u}_2 = (-1,0,1,1)$, si trovi una base ortonormale di U e si calcoli la proiezione ortogonale del vettore $\vec{z} = (1,1,0,0)$ su U.

7. Determinare il tipo della conica

$$\mathcal{C}\colon x^2 + xy + y^2 + x + y - 5 = 0$$

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

FACOLTÀ di INGEGNERIA INDUSTRIALE

Esame di Geometria e Algebra N.O., 14 luglio 2010

Soluzioni degli esercizi

1. La retta richiesta passerà per A ed avrà parametri direttori proporzionali ai parametri di giacitura di α, che sono $(1, -1, 3)$. Quindi eq. parametriche e cartesiane sono

$$r\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \qquad r\colon \begin{cases} 3x - z - 2 = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

2. I parametri direttori di r sono $(1, 1, 1)$ quindi r ed s non sono parallele. Inoltre $r \cap s = \varnothing$, quindi r ed s sono sghembe. Se $\tilde{\alpha}$ è il piano passante per r e parallelo ad s, allora

$$\mathrm{dist}(r, s) = \mathrm{dist}(\tilde{\alpha}, Q), \qquad Q \in s.$$

Ora $\tilde{\alpha}\colon 2x - y - z - 1 = 0$ e scelto $Q(-1, -2, 0)$ si ha $d(Q, \tilde{\alpha}) = 1/\sqrt{6}$.

3. La curva proiezione si trova come intersezione del cono di vertice A e curva direttrice $\mathcal{C}$ con il piano α. Le equazioni parametriche di tale cono sono

$$(x, y, z) = A + u(\mathcal{C}(t) - A),$$

dove $\mathcal{C}(t) = (t^2 - t, t + 1, t - 1)$. Per trovare equazioni parametriche della curva $\mathcal{C}'$ si consideri il sistema tra l'equazione parametrica del cono trovata sopra ed il piano α:

$$\begin{cases} x = 2 + u(t^2 - t + 2) \\ y = -1 + ut \\ z = 4 + u(t + 3) \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

e sostituire x, y, z nell'ultima equazione. Si ottiene una relazione tra u e t dalla quale si può ricavare u in funzione di t: $u = 15/(t^2 + t + 11)$. Sostituendo questo valore nell'equazione parametrica del cono si ottiene l'equazione parametrica di $\mathcal{C}'$.

4. Si devono trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono scalari λ_1, λ_2, λ_3 tali che valga la seguente relazione:

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = w.$$

Pertanto il problema equivale a trovare le soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro k:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Con le consuete operazioni si arriva al sistema lineare (con le stesse soluzioni del sistema precedente!)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ k+2 \\ 2k \end{pmatrix}.$$

È evidente che tale sistema ammette un'unica soluzione per $k = 0$, e nessuna soluzione altrimenti.

5. Siccome la matrice è triangolare, gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale, ed il determinante è il prodotto degli elementi diagonali. Ne segue che $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$, e che il solo autovalore con molteplicità maggiore di 1 è $\lambda = 2$. Risulta tuttavia $\dim V(2) = 1$, quindi f non è semplice.

6. Dalla teoria si sa che la componente ortogonale di $\vec{z}$ su U è data da $\vec{z}_U = g(\vec{z}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + g(\vec{z}, \vec{e}_2)\vec{e}_2$, dove $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ costituiscono una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare dato (qui è ovviamente il prodotto scalare standard). Si applichi il metodo di Gram-Schmidt per trovare $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a partire da $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, poi con semplici calcoli si ricava il risultato.

7. La matrice della forma quadratica associata alla conica è $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, i cui autovalori sono $1/2$ e $3/2$. Pertanto la conica è un'ellisse.