Università del Salento
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Industriale
Primo esonero di **FISICA GENERALE 2** del 16/11/21

Esercizio 1 (10 punti):

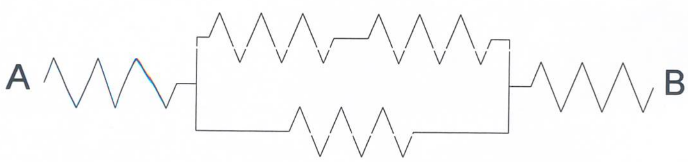
Una distribuzione di carica è costituita da una sfera isolante di raggio R= 50.0 cm e con densità di carica dipendente dalla distanza dal centro della distribuzione, r, secondo la relazione $\rho=Ar^2$, con A= 10.0 C/m^5.
Si determinino:
a) il campo elettrico in un punto qualsiasi dello spazio;
b) la forza elettrica agente su una carica di prova q=0.200 C posta alle seguenti distanze dal centro della sfera: d_1=0.00 cm, d_2=25.00 cm, d_3=50.0 cm, d_4=100 cm;
c) la carica totale della distribuzione.

Esercizio 2 (10 punti):

Una distribuzione di carica è costituita da quattro cariche puntiformi identiche di valore Q=0.250 C e massa m=200 g, poste in corrispondenza dei vertici di un quadrato di lato L=1.50 m.
Si determinino:
a) l'energia potenziale elettrica di una delle cariche;
b) l'energia necessaria per assembrare la distribuzione di carica;
c) la velocità massima raggiungibile da una delle cariche, lasciata libera di muoversi.

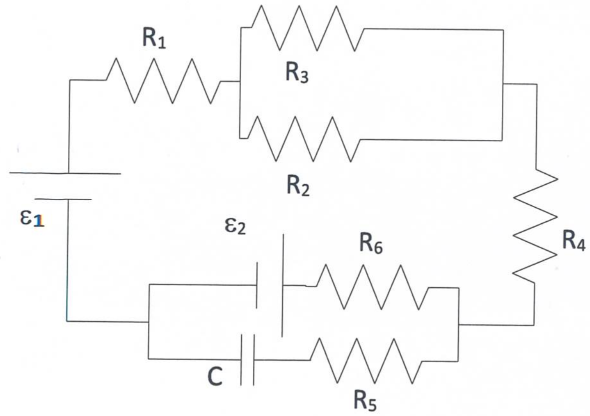
Esercizio 3 (10 punti):

Cinque resistori identici, di resistenza 50Ω sono collegati secondo lo schema in Figura.
Si determinino:
a) la resistenza equivalente del sistema di resistori.
b) la differenza di potenziale ai capi di ogni resistore se tra A e B è collegata una batteria con forza elettromotrice pari a 10 V.

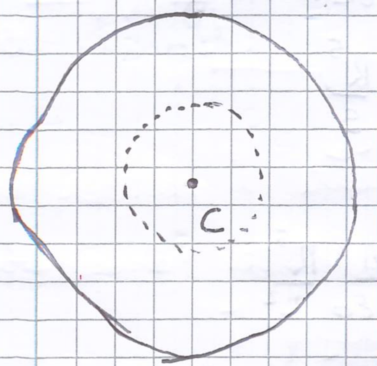


Esercizio 4 (10 punti):

Il circuito in figura opera in condizioni stazionarie. Si determinino:
a) I valori delle correnti nei vari rami.
b) La potenza erogata dalle batterie 1 e 2.
c) La carica sul condensatore.
R_1=40.0 Ω, R_2=120 Ω, R_3=35.0 Ω, R_4=25.0 Ω, R_5=150 Ω, R_6=150 Ω,C=15.0 μF, ε_1=10.0 V, ε_2=15.00 V



SOLUZIONE



$\rho = A r^2$

$A = 10.0\ C/m^5$

$R = 50.0\ cm$

a) Data la simmetria sferica della distribuzione il campo elettrico è necessariamente diretto radialmente, e dipende dalla sola distanza dal centro della distribuzione, pertanto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\,\hat{r}$$

Il campo può essere determinato applicando la legge di Gauss ad una superficie sferica concentrica alla distribuzione, e di raggio r.

Partiamo dal caso $r < R$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{SFERA} (E_r(r)\,\hat{r}) \cdot (dA\,\hat{r}) = \int_{SFERA} E_r(r)\, dA = E_r(r) \int_{SFERA} dA =$$

$$= E_r(r)\, 4\pi r^2$$

Per calcolare q_i conviene considerare elementi di volume costituiti da gusci sferici di spessore infinitesimo

$$q_{int} = \int \rho\, dV = \int_0^r \rho(r)\, 4\pi r^2 dr = \int_0^r A r^2 \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= 4\pi A \int_0^r r^4 dr = 4\pi A \frac{r^5}{5}$$

Pertanto

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \iff E_r(r)\, \cancel{4\pi} \cancel{r^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cancel{4\pi} A \frac{r^{\cancel{5}\,3}}{5} \iff$$

$$\iff E_r(r) = \frac{A}{5\varepsilon_0} r^3$$

Se $r > R$ il calcolo del flusso di $\vec{E}$ resta formalmente identico, mentre il calcolo della carica interna diventa:

$$q_{int} = Q_{TOT} = \int_0^R \rho(r)\, 4\pi r^2 dr = 4\pi A \frac{R^5}{5}$$

Dalla legge di Gauss si ha

$$E_r(r)\, \cancel{4\pi} r^2 = \frac{\cancel{4\pi} A}{\varepsilon_0} \frac{R^5}{5} \iff E_r(r) = \frac{A}{5\varepsilon_0} \frac{R^5}{r^2}$$

È immediato verificare che il campo è continuo in $r = R$

b) Nei vari punti si ha $\vec{F} = q\vec{E}$

$d_1 = 0.00$ cm è al centro della distribuzione e si ha

$$\vec{F} = q\vec{E}(d_1) = q \frac{A}{5\varepsilon_0} (d_1)^3 \hat{r} = \vec{0}$$

$d_2 = 25.0$ cm corrisponde ad un punto all'interno della distribuzione e si ha

$$\vec{F} = q\vec{E}(d_2) = \frac{qA}{5\varepsilon_0} d_2^3 \hat{r} = \frac{0.2 \cdot 10}{5 \cdot 8.85\ 10^{-12}} \cdot (25\ 10^{-2})^3 \hat{r} =$$

$$= 706.2146 \frac{10^{-6}}{10^{-12}} \hat{r} = 7.062146\ 10^8 \hat{r} = 7.06\ 10^8 \frac{N}{C} \hat{r}$$

$d_3 = 50.0$ cm è sulla superficie esterna e si ha

$$\vec{F} = q\vec{E}(d_3) = \frac{qA}{5\varepsilon_0} d_3^3 \hat{r} = 5.6497\ 10^9 \hat{r} = 5.65\ 10^9 \hat{r}$$

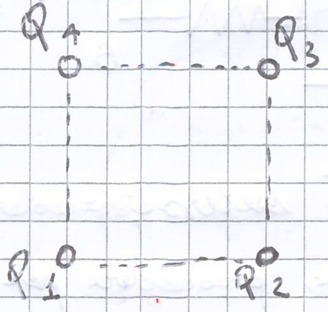
$d_4 = 100$ cm è all'esterno della distribuzione e si ha

$$\vec{F} = q\vec{E}(d_4) = q \frac{A}{5\varepsilon_0} \frac{R^5}{d_4^2} \hat{r} = \frac{0.2\ 10}{5 \cdot 8.85\ 10^{-12}} \cdot \frac{(50\ 10^{-2})^5}{1^2} \hat{r} =$$

$$= 1.4124\ 10^9 \hat{r} = 1.41\ 10^9 \hat{r}$$

c) $$Q_{TOT} = 4\pi A \frac{R^5}{5} = 4\pi \cdot 10 \cdot \frac{(50\ 10^{-2})^5}{5} = 7.8539\ 10^{-1} = 7.85\ 10^{-1} C$$

Esercizio 2



$Q = 0.250\ C$

$L = 1.50\ m$

$m = 200\ g$

a) Numeriamo per chiarezza le quattro cariche e calcoliamo l'energia potenziale della carica 1

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{\sqrt{2}L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_4}{L} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{L}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\, 8.85\, 10^{-12}}\frac{(0.25)^2}{1.5}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.0142\ 10^9 = 1.01\ 10^9\ J$$

b) L'energia si calcola immaginando di portare una alla volta le quattro cariche nella loro posizione, partendo da distanza infinita. Procedendo in ordine di numerazione crescente

$$U = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{\sqrt{2}L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_4}{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2Q_4}{\sqrt{2}L} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3Q_4}{L} = 2\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(0.25)^2}{2\pi \cdot 8.85\, 10^{-12}\, 1.5}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

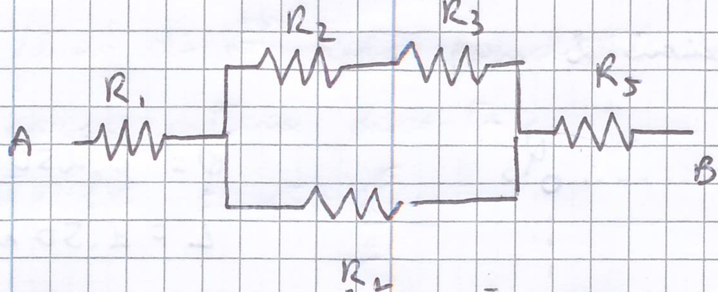
$$= 2.0284\ 10^9\ J = 2.03\ 10^9\ J$$

c) La massima velocità viene raggiunta quando l'energia potenziale elettrostatica si trasforma interamente in energia cinetica, cioè quando la carica arriva a distanza infinita dalla distribuzione. Supponendo di considerare la carica Q_1 si ha

$$\frac{1}{2}m v_{max}^2 = U_1 \iff v_{max}^2 = \frac{2U_1}{m} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2U_1}{m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot 1.01\ 10^9}{0.2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.01\ 10^9}{2\, 10^{-1}}} = \sqrt{1.01\ 10^{10}} = 1.00\ 10^5\ m/s$$

Esercizio 3



$R_i = 50\,\Omega = R$

$V_{AB} = 10$ V

a) Per determinare la resistenza equivalente è utile procedere per passi, osservando innanzitutto che i resistori in serie e che la loro resistenza equivalente è

$$R^{eq}_{23} = R_2 + R_3 = 2R$$

Il resistore equivalente di resistenza R^{eq}_{23} è in parallelo al resistore 4 e la capacità equivalente del parallelo è:

$$\frac{1}{R^{eq}_{234}} = \frac{1}{R^{eq}_{23}} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R} \iff R^{eq}_{234} = \frac{2}{3} R$$

Infine i resistori 1, 5 e il resistore equivalente al collegamento dei resistori 2, 3 e 4 sono in serie, pertanto:

$$R^{eq} = R_1 + R^{eq}_{234} + R_5 = R + \frac{2}{3} R + R = \frac{8}{3} R = 133.33 = 130\,\Omega$$

b) La differenza di potenziale ai capi di ogni resistore è legata alla resistenza e alla corrente che attraversa il resistore dalla legge di Ohm $\Delta V_i = R_i I_i$

Il modo più semplice per risolvere l'esercizio è notare che la corrente attraverso il resistore 1 e il resistore 5 è la stessa, che è anche pari alla corrente totale che attraversa la combinazione dei resistori 2, 3 e 4. Tale corrente è pari a

$$\Delta V_{AB} = R^{eq} i \iff i = \frac{\Delta V_{AB}}{R^{eq}} = \frac{10}{133.3} = 0.075188 = 7.5\,10^{-2}\ \text{A}$$

La differenza di potenziale ai capi dei resistori 1 e 5 sarà la stessa, perché hanno la stessa resistenza e sono attraversati dalla stessa corrente, e vale:

$$\Delta V_1 = \Delta V_5 = R i = 3.759 = 3.8\ \text{V}$$

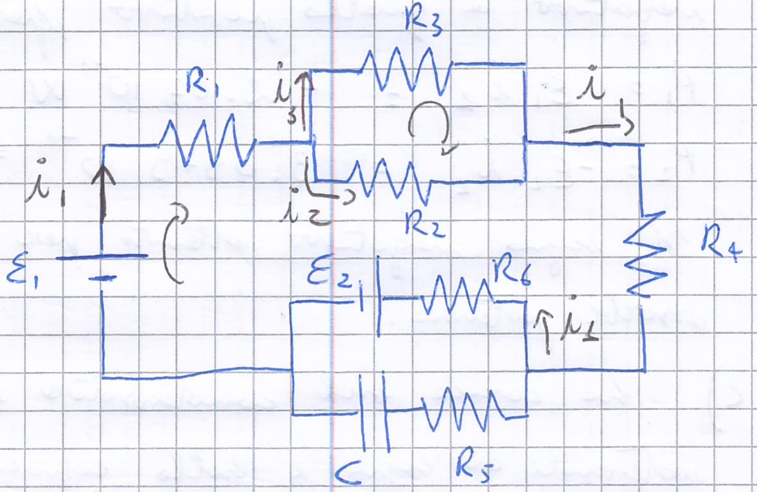
Ai capi della combinazione dei resistori 2, 3 e 4 ci sarà pertanto una differenza di potenziale pari a $\Delta V_{AB} - \Delta V_1 - \Delta V_5 = 2.481 = 2.5$ V

Tale differenza di potenziale è ai capi sia di R_4 che della serie 2, 3. Inoltre i resistori 2 e 3 avranno le stesse differenze di potenziale ai capi (di nuovo perché hanno le stesse resistenze e la stessa corrente), pertanto

$\Delta V_4 = 2.5\ V$

$\Delta V_2 = \Delta V_3 = \dfrac{\Delta V_4}{2} = 1.24 = 1.2\ V$

Esercizio 4



$R_1 = 40.0\ \Omega \qquad R_2 = 120\ \Omega$

$R_3 = 35.0\ \Omega \qquad R_4 = 25.0\ \Omega$

$R_5 = 150\ \Omega \quad = R_6$

$C = 15.0\ \mu F$

$\mathcal{E}_1 = 10.0\ V \qquad \mathcal{E}_2 = 15.0\ V$

a) In condizioni stazionarie il ramo in cui si trova il condensatore non è attraversato da corrente, e le correnti nel circuito sono quelle in figura. Applicando la prima legge di Kirchhoff al nodo in cui i_1 si divide tra i_2 e i_3 e la seconda alle maglie contenenti la batteria 1, R_1, R_2, R_4, R_6 e la batteria 2 e alla maglia contenente R_2 e R_3, entrambe percorse in verso orario si ha:

$$\begin{cases} (1) & i_1 = i_2 + i_3 \\ (2) & \mathcal{E}_1 - R_1 i_1 - R_2 i_2 - R_4 i_1 - R_6 i_1 - \mathcal{E}_2 = 0 \\ (3) & -R_3 i_3 + R_2 i_2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (3) & i_3 = \dfrac{R_2}{R_3} i_2 \\ (1) & i_1 = i_2 + i_3 = i_2 + \dfrac{R_2}{R_3} i_2 \\ (2) & \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - i_1 (R_1 + R_4 + R_6) - R_2 i_2 = 0 \end{cases}$$

Dalla (2) si ottiene

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - i_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)(R_1 + R_4 + R_6) - R_2 i_2 = 0 \iff$$

$$\iff i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)(R_1 + R_4 + R_6) + R_2} = \frac{10 - 15}{\left(1 + \frac{120}{35}\right)(40 + 25 + 150) + 120} =$$

$= -0.00466355 = -4.66 \, 10^{-3}$ A

Dalla ① si ha $i_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) i_2 = -0.0206528 = -2.07 \, 10^{-2}$ A

Infine dalla ③ si ha

$i_3 = \frac{R_2}{R_3} i_2 = -0.015989 = -1.60 \, 10^{-2}$ A

b) La potenza erogata da una batteria è il prodotto tra la forza elettromotrice e la corrente che la attraversa dal polo negativo a quello positivo, pertanto

$P_1 = \mathcal{E}_1 i_1 = -2.07 \, 10^{-1}$ W

$P_2 = -\mathcal{E}_2 i_1 = 3.0979 \, 10^{-1} = 3.10 \, 10^{-1}$ W

Il segno negativo ottenuto per P_1 indica che la batteria 1 assorbe potenza.

c) La carica sul condensatore dipende dalla differenza di potenziale ai capi e dalla capacità tramite la relazione

$Q = C \Delta V$

ΔV coincide con la differenza di potenziale ai capi della serie tra la batteria 2 e il resistore 6 e vale

$\Delta V = \mathcal{E}_2 + R_6 i_1 = 15 - 3.0979 = 11.9$ V

Pertanto

$Q = C \Delta V = 15 \, 10^{-6} \cdot 11.9 = 178.53 \, 10^{-6} = 1.79 \, 10^{-4}$ C