

# Legge di Malus

Marco Anni

## 1 Scopo dell'esperienza

Ci si propone di verificare la validità della Legge di Malus.

## 2 Cenni teorici

La Legge di Malus venne formulata nel 1808 dallo scienziato francese Etienne Luis Malus a valle di una serie di esperimenti sulla doppia riflessione della luce da parte di due lamine trasparenti. Espressa in termini moderni la Legge lega l'intensità di un fascio luminoso linearmente polarizzato, trasmessa da un polarizzatore, all'angolo  $\theta$  tra la direzione di polarizzazione e la direzione di trasmissione del polarizzatore e all'intensità iniziale del fascio  $I_0$  :

$$I(\theta) = I_0 \cos^2(\theta) \quad (1)$$

## 3 Strumentazione a disposizione

L'apparato sperimentale è costituito da (vedi Figura 1):

- Diodo laser con emissione nel rosso, come sorgente luminosa;
- Coppia di polarizzatori a lamina montati su un supporto goniometrico. Il primo (detto in seguito *polarizzatore*) consente di ottenere un fascio luminoso linearmente polarizzato e rimarrà fisso durante le misure, mentre il secondo (detto in seguito *analizzatore*) verrà ruotato per variare l'angolo  $\theta$ ;
- Fotorivelatore (*fotodiodo*) al silicio, che genera una corrente (detta *fotocorrente*) direttamente proporzionale all'intensità luminosa incidente;
- Picoamperometro con fondoscala (e sensibilità) variabile, per la misura della fotocorrente.

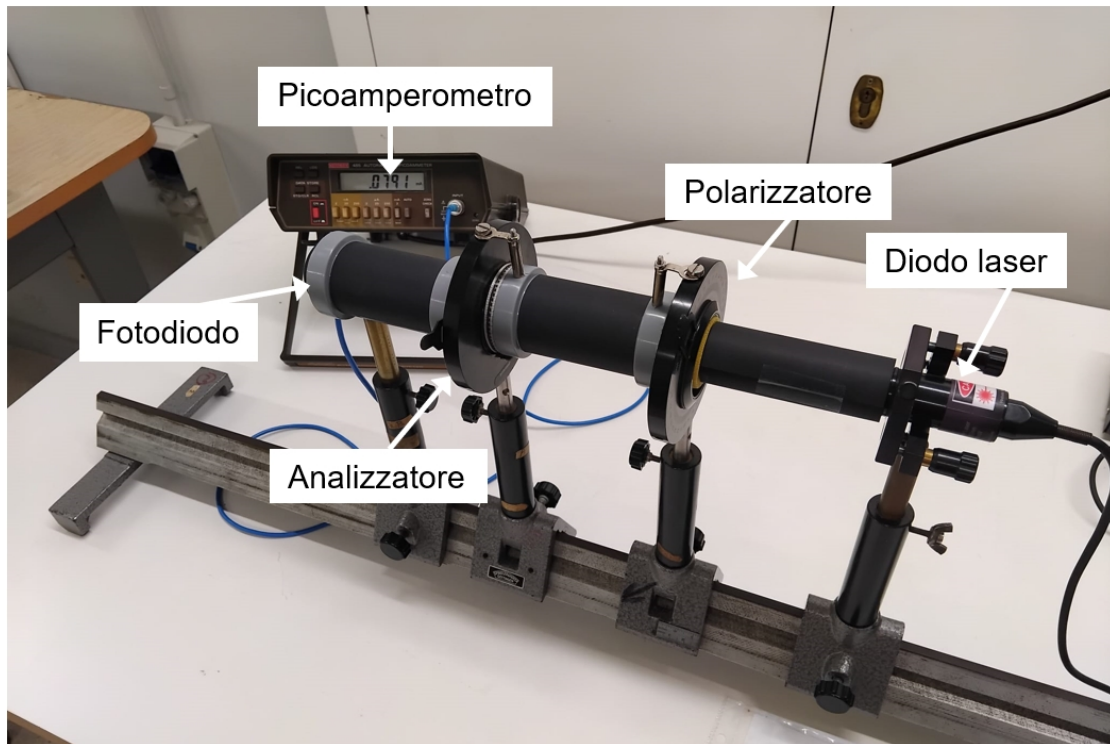


Figura 1: Foto dell'apparato sperimentale

## 4 Operazioni preliminari

Per svolgere al meglio l'esperimento è preliminarmente utile tener conto che il diodo laser utilizzato come sorgente luminosa emette radiazione parzialmente polarizzata. Pertanto la rotazione del polarizzatore comporta una variazione dell'intensità trasmessa (che invece non ci sarebbe se la luce proveniente dal laser fosse non polarizzata), legata all'angolo tra direzione di trasmissione del polarizzatore e direzione di massima intensità del campo elettrico del fascio luminoso. La differenza tra l'intensità misurata quando la direzione di trasmissione del polarizzatore coincide con la direzione di massimo campo elettrico, e la configurazione in cui le due direzioni sono ortogonali, può superare un fattore 100. Tenendo conto che l'analizzatore consentirà la trasmissione di una parte dell'intensità trasmessa dal polarizzatore, è immediato convincersi che la condizione migliore per eseguire l'esperimento è quella in cui la trasmissione del polarizzatore è massima. Tale configurazione può essere determinata semplicemente fissando la scala del picoamperometro al fondoscala 2 mA, allineando le direzioni di trasmissione di polarizzatore e analizzatore, e ruotandoli insieme fino alla configurazione in cui il segnale è massimo. Una volta individuata grossolanamente tale configurazione,

si suggerisce di effettuare spostamenti più piccoli intorno alla configurazione di massimo per accertarsi di averla individuata correttamente. Si tenga anche conto che, visto che l'apparato sperimentale non è stato assemblato a caso, è verosimile che la configurazione di massima intensità sia vicina a valori *comodi* della scala goniometrica (ragionevolmente vicina ai multipli di  $90^\circ$ ).

## 5 Esecuzione dell'esperimento

Partendo dalla configurazione di intensità massima, cioè con le direzioni di trasmissione di polarizzatore e analizzatore parallele, registrare la lettura del picoamperometro ruotando l'analizzatore con passo costante, determinando l'angolo  $\theta$  come differenza tra la lettura del goniometro dell'analizzatore e quello del polarizzatore (se necessario si aggiunga il termine utile a portare i valori nell'intervallo  $0^\circ$ - $360^\circ$ ). Considerato che ogni singola misura richiede un tempo limitato si suggerisce di scegliere un passo non superiore a  $10^\circ$  e di coprire l'intero intervallo da  $0^\circ$  a  $360^\circ$  (le misure a  $0^\circ$  e  $360^\circ$  dovrebbero dare letture consistenti entro l'incertezza di misura, ma averle entrambe può risultare utile in fase di analisi dati per identificare, o escludere, eventuali variazioni delle condizioni ambientali durante l'intero esperimento). Per lavorare sempre alla massima sensibilità del picoamperometro è importante scegliere opportunamente il valore di fondoscala, al più piccolo che consente di registrare il valore di corrente di interesse. A tale scopo è sufficiente partire dalla scala più sensibile con valore di fondoscala superiore a  $I(0)$ , e passare gradualmente a scale più sensibili quando il valore di corrente scende al di sotto del fondoscala della scala precedente. Tale procedura consentirà di acquisire i valori di corrente per valori di  $\theta$  tra  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , progressivamente decrescenti. Superati i  $180^\circ$  i valori di corrente aumentano all'aumentare dell'angolo, richiedendo cautela nell'utilizzo delle varie scale per evitare di portare fuori scala (indicato con OL, Over Load, sullo schermo) il picoamperometro. A tale scopo si suggerisce, quando si registra un valore di corrente non molto inferiore al fondoscala, di passare alla scala successiva (con sensibilità minore) prima di ruotare l'analizzatore. Qualora il valore di corrente dovesse essere minore del fondoscala della scala di partenza, si può tornare a questa scala per registrare il valore di corrente. Durante le misure tipicamente si osserva che la lettura del picoamperometro è stabile per valori di corrente grandi (quindi scala con sensibilità piccola), ma è facile osservare fluttuazioni del valore registrato dal picoamperometro quando si utilizzano le scale più sensibili. Nel primo caso si può usare come incertezza massima l'unità della più piccola cifra significativa, mentre nel secondo è necessario stimare il valore minimo e il massimo in un intervallo di tempo ragionevole (ad esempio una decina di secondi), e utilizzare il valor medio come miglior stima della corrente e la semidispersione come errore massimo.

## 6 Analisi dati

Dopo aver convertito opportunamente le incertezze massime in incertezze statistiche, la verifica della Legge di Malus richiede l'adattamento, nel senso dei minimi quadrati, dei dati sperimentali all'equazione 1. È molto probabile che il risultato del primo adattamento mostri un valore di  $\chi^2$  ridotto molto lontano, tipicamente in eccesso, da quello atteso (dell'ordine di 51 con 36 gradi di libertà).

Prima di attribuire tale risultato al mancato adattamento dei dati al modello usato è fondamentale indagare in dettaglio l'origine dell'apparente disaccordo tra andamento osservato e andamento atteso.

Innanzitutto è necessario accertarsi dell'assenza di eventuali scostamenti sistematici tra dati e curva di Best-fit.

### 6.1 Rumore di fondo

La prima possibile causa sperimentale di disaccordo deriva dall'aver implicitamente assunto nel modello che la minima intensità sia pari a 0, quando le direzioni di trasmissione dei due polarizzatori sono perpendicolari. Per quanto questo sia concettualmente corretto, in un esperimento difficilmente il minimo valore di corrente è compatibile con lo zero entro l'incertezza, perchè alla corrente misurata dal fotodiodo contribuisce, oltre al segnale dovuto alla luce trasmessa dall'analizzatore, anche un segnale di fondo. L'origine di tale segnale è in parte termica e in parte ottica (un polarizzatore reale non ha mai la capacità di bloccare completamente la luce polarizzata ortogonalmente alla direzione di trasmissione). Considerato che le misure in prossimità dei minimi vengono effettuate con un'elevata sensibilità, è verosimile che il picoamperometro consenta di misurare tale segnale di fondo. La sua eventuale presenza può essere valutata osservando i valori di corrente per  $\theta$  pari a  $90^\circ$  e  $270^\circ$  e confrontandoli con 0, entro l'incertezza. Qualora i valori minimi di corrente non siano compatibili con lo 0, è necessario modificare il modello aggiungendo un termine additivo costante,  $I_{fondo}$ , e ripetere l'adattamento usando la funzione seguente:

$$I(\theta) = I_{fondo} + I_0 \cos^2(\theta) \quad (2)$$

### 6.2 Errato allineamento del polarizzatore

Se anche l'adattamento con l'Equazione 2 evidenziasse valori di  $\chi^2$  ridotto troppo elevati sarebbe necessario accertarsi che non vi siano errori sistematici nei valori di  $\theta$ , dovuti ad un'erronea valutazione della posizione del polarizzatore in configurazione di segnale massimo, che comporterebbe un errore sulla configurazione di zero della scala dei valori di  $\theta$ , e dati sistematicamente traslati in orizzontale rispetto alla curva di Best-fit. In alcuni casi, per errori dell'ordine di  $0.5^\circ$ - $1^\circ$  è

sufficiente osservare attentamente il grafico contenente i dati e la curva di Best-fit per notare che i dati sono sistematicamente al di sopra della curva in alcuni intervalli, e sistematicamente sotto negli altri. Un'informazione più oggettiva si può invece ottenere dal grafico dei residui normalizzati, che mostreranno delle oscillazioni regolari. Per tener conto di tale errore sistematico è nuovamente necessario modificare il modello, aggiungendo un termine correttivo  $\theta_0$  all'angolo  $\theta$ :

$$I(\theta) = I_{fondo} + I_0 \cos^2(\theta + \theta_0) \quad (3)$$

### 6.3 Errata valutazione dell'incertezza dei valori di corrente

Molto probabilmente anche questa ulteriore correzione del modello non porterà a riduzioni significative del  $\chi^2$ , rendendo necessario una valutazione della correttezza dei valori utilizzati per le incertezze sui valori di corrente, ricordando che una sottostima (sovrastima) delle incertezze comporta una sovrastima (sottostima) del  $\chi^2$ . Nel caso specifico, un valore di  $\chi^2$  (molto) superiore a quello atteso, suggerisce una significativa sottostima delle incertezze sui valori di corrente.

Per quanto possa sembrare paradossale, l'origine di tale problema è aver misurato la corrente con uno strumento estremamente sensibile (o, meglio, notevolmente più sensibile della scala goniometrica utilizzata per misurare gli angoli).

In generale, data una grandezza  $y$ , dipendente da una seconda grandezza  $x$  ( $y = f(x)$ ), l'incertezza su  $y$  dipende non solo dall'incertezza di misura di  $y$ , ma anche da quella di  $x$  (dato che una variazione della  $x$  entro l'incertezza comporta una corrispondente variazione della funzione  $f(x)$ ). Il contributo  $\sigma_{yx}$  dell'incertezza su  $x$ ,  $\sigma_x$ , all'incertezza totale su  $y$ ,  $\sigma_{ytot}$ , si può facilmente determinare come:

$$\sigma_{yx} = \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right| \sigma_x \quad (4)$$

L'incertezza statistica sulla  $y$  sarà quindi:

$$\sigma_{ytot} = \sqrt{\sigma_{yx}^2 + \sigma_y^2} \quad (5)$$

dove  $\sigma_y$  è l'incertezza dovuta alla misura di  $y$ .

Nel caso specifico è immediato verificare che:

$$\left| \frac{\partial I(\theta)}{\partial \theta} \right| = 2I_0 |\cos(\theta + \theta_0) \sin(\theta + \theta_0)| \quad (6)$$

Pertanto il contributo all'incertezza statistica sulla corrente, dovuto all'incertezza di lettura su  $\theta$  è dato da:

$$\sigma_{I\theta} = 2I_0 |\cos(\theta + \theta_0) \sin(\theta + \theta_0)| \sigma_\theta \quad (7)$$

La valutazione di  $\sigma_{I\theta}$  può essere per ogni valore di  $\theta$  utilizzando per  $I_0$  e  $\theta_0$  i valori di Best-fit trovati in precedenza, per poi calcolare l'incertezza sui valori di corrente utilizzando l'Equazione 7 e ripetere il fit.

Come ultimo punto, qualora il fit fornisca l'indicazione di assenza di scostamenti sistematici tra dati e funzione, si può valutare la correttezza della stima di  $\sigma_\theta$  confrontando il valore del  $\chi^2$  ottenuto con quello atteso.