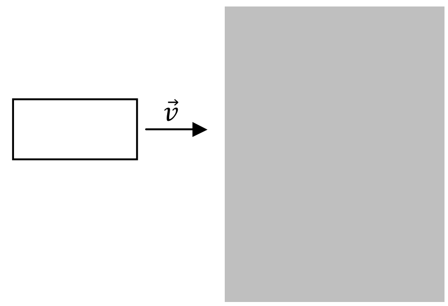
Università del Salento

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Industriale

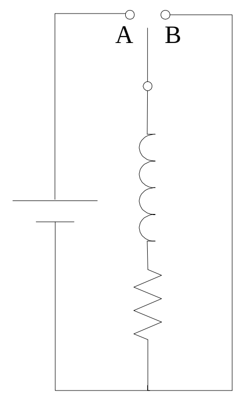
Secondo esonero di **FISICA GENERALE 2** del 16/01/15

Esercizio 1 (7 punti): Nella regione di spazio compresa tra due cilindri coassiali di raggio R_1 e R_2 è presente una densità di corrente uniforme, parallela all'asse dei cilindri, $\overrightarrow{J_0} = J_0\hat{z}$. Si determini il campo magnetico generato dalla distribuzione di corrente.
R_1= 20.0 cm R_2= 50.0 cm J_0= 2 Acm^{-2}

Esercizio 2 (7 punti):Una spira rettangolare di resistenza R=5 Ω di lunghezza L= 50 cm e larghezza w= 10 cm si muove con velocità costante, parallela al lato lungo, e di modulo v= 10 cms^{-1} verso una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare alla spira ed entrante nel foglio, di modulo B=100 mT. Si determini la corrente che circola nella spira quando:
1) Si muove nella regione in cui non c'è campo magnetico;
2) Entra nella regione con il campo magnetico;
3) Esce dalla regione con il campo magnetico.



Esercizio 3 (10 punti): Nel circuito in figura sono presenti un resistore di resistenza R=50 Ω, un induttore di induttanza L=20 mH, e un generatore di forza elettromotrice ε=15 V. Inizialmente nel circuito non circola corrente e l'interruttore è in posizione verticale. All'istante t=0 s l'interruttore viene chiuso in posizione A. Si determinino:
1) La corrente nel circuito in funzione del tempo.
2) La differenza di potenziale ai capi di ogni componente in funzione del tempo.
3) Il valore di regime della corrente nel circuito.
4) Se l'interruttore viene spostato rapidamente in posizione B, si determini dopo quanto tempo la corrente si dimezza, supponendo che la corrente iniziale sia pari al valore di regime.



Esercizio 4 (8 punti): In circuito RLC in serie sono presenti un resistore di resistenza R= 100 Ω, un induttore di induttanza L= 1mH, e un condensatore di capacità C= 5μF. Il circuito è alimentato con un generatore di tensione sinusoidale, con ΔV_{eff}= 220 V e frequenza ν=50 Hz.
Si determinino:
1) La reattanza induttiva.
2) La reattanza capacitiva.
3) L'impedenza del circuito.
4) La corrente massima nel circuito.
5) La differenza di potenziale massima ai capi di ogni componente del circuito.
6) L'angolo di fase tra tensione e corrente.

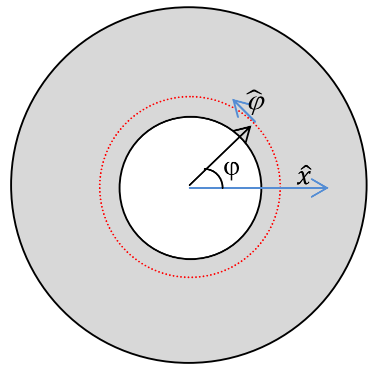
Teoria 1 (4 punti): Data una sbarretta di lunghezza L, in moto con velocità $\vec{v}$ perpendicolare alla sbarretta, in moto in una regione in bui si trova un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, ortogonale sia a $\vec{v}$ che alla sbarretta, si dimostri che la differenza di potenziale indotta ai capi della sbarretta è V=BvL.

Teoria 2 (4 punti): Si enunci la Legge di Ampere-Maxwell (o Legge di Ampere generalizzata) e se ne dimostri la validità nel caso della scarica di un condensatore.

Soluzione

Esercizio 1

Scegliendo coordinate cilindriche con asse z coincidente con l'asse comune dei due cilindri è immediato verificare che, per motivi di simmetria, il campo dipende solo dalla distanza dall'asse e ha linee di forza circolari con centro sull'asse del sistema, pertanto $\vec{B} = B_\varphi(r)\hat{\varphi}$.



Applicando la Legge di Ampere ad una linea circolare di raggio r, con centro sull'asse e percorsa in verso concorde a quello di $\hat{\varphi}$ si ha:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Leftrightarrow B_\varphi(r) 2\pi r = \mu_0 \int \vec{J_0} \cdot d\vec{A}$$

Il secondo membro rappresenta la corrente concatenata con la linea, cioè la corrente che attraversa una qualunque superficie che ha la linea come bordo. Scegliendo come superficie il cerchio di raggio r è immediato verificare che:

$$\int \vec{J_0} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} 0 \quad se\, r < R_1 \\ J_0 \pi (r^2 - R_1^2) \quad se\, R_1 \le r < R_2 \\ J_0 \pi (R_1^2 - R_1^2) \quad se\, r \ge R_2 \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} 0 \quad se\, r < R_1 \\ \mu_0 J_0 \dfrac{(r^2 - R_1^2)}{2r} \quad se\, R_1 \le r < R_2 \\ \mu_0 J_0 \dfrac{(R_2^2 - R_1^2)}{2r} \quad se\, r \ge R_2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici si ha infine:

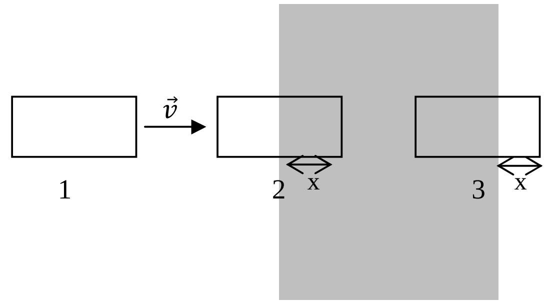
$$B_\varphi(r) = \begin{cases} 0 \quad se\, r < R_1 \\ 4\pi\, 10^{-3} \dfrac{(r^2 - 4\, 10^{-2})}{r} \quad se\, R_1 \le r < R_2 \\ \dfrac{8.4\, \pi 10^{-4}}{r} \quad se\, r \ge R_2 \end{cases}$$

Dove il campo è misurato in Tesla.

Esercizio 2

La corrente che circola, eventualmente, nella spira è dovuta all'induzione di una forza elettromotrice, causata da una variazione del flusso del campo magnetico attraverso la spira.

Poiché il campo è presente in una regione di spazio limitata l'unico contributo al flusso deriva dalla parte di spira all'interno del campo magnetico, e pertanto la forza elettromotrice indotta è diversa da zero solo quando la frazione di spira all'interno del campo magnetico cambia nel tempo (quindi solo quando la spira entra o esce dal campo magnetico).



1) Quando la spira è interamente all'esterno del campo magnetico, il flusso del campo magnetico è costantemente nullo.

La derivata del flusso è zero, e pertanto sono nulle sia la forza elettromotrice indotta che la corrente.

2) Quando la spira sta entrando nel campo, l'unico contributo al flusso è dato dalla parte di spira all'interno del campo. Indicando con x la distanza del lato destro della spira dal bordo sinistro della regione con il campo magnetico, orientando il vettore associato alla superficie della spira verso l'alto, e scegliendo un asse z perpendicolare uscente dal foglio, si ha:

$$\vec{B} = B_z\hat{z} = -B\hat{z}$$

$$\Phi_{\mathrm{B}} = B_z\mathrm{wx} = -\mathrm{Bwx}$$

Pertanto:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_{\mathrm{B}}}{dt} = Bw\frac{dx}{dt} = Bwv$$

La corrente che circola nella spira è quindi:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{Bwv}{R} = 2\ 10^{-4}A = 0.2\ mA$$

In base alla relazione tra verso positivo della forza elettromotrice indotta e verso positivo del vettore associato all'area della spira, e in base alla scelta fatta sul verso di quest'ultimo vettore, una corrente positiva circola in verso antiorario.

3) In questo caso contribuisce al flusso solo la parte di spira che non è ancora uscita dal campo magnetico. Indicando con x la posizione del lato destro della spira rispetto al bordo destro del campo, e con la stessa scelta del verso del vettore associato all'area della spira abbiamo:

$$\Phi_{\mathrm{B}} = B_z\mathrm{w}(\mathrm{L} - \mathrm{x}) = -\mathrm{BwL} + \mathrm{Bwx}$$

Pertanto:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_{\mathrm{B}}}{dt} = -Bw\frac{dx}{dt} = -Bwv$$

La corrente che circola nella spira è quindi:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{Bwv}{R} = -2\ 10^{-4}A = -0.2\ mA$$

In questo caso la corrente circola in verso orario.

Esercizio 3

1) Applicando la seconda legge di Kirchhoff al circuito con l'interruttore in posizione A abbiamo:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon$$

Avendo definito come verso positivo della corrente, e di percorrenza della maglia, quello orario.

La soluzione dell'equazione differenziale, come visto a lezione, è:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

con $\tau = L/R$.

Sostituendo i valori numerici si trova:

$$I(t) = 0.3(1 - e^{-2500t})$$

2) La differenza di potenziale (in Volt) ai capi dei due componenti del circuito è data da:

$$\Delta V_R(t) = RI(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 15(1 - e^{-2500t})$$

$$\Delta V_L(t) = L\frac{dI}{dt} = L\frac{\varepsilon}{R\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} = 15e^{-2500t}$$

Si noti come all'istante iniziale la differenza di potenziale erogata dalla batteria si trovi tutta ai capi dell'induttore, mentre al passare del tempo la differenza di potenziale ai capi dell'induttore tenda a zero e quella ai capi della resistenza tenda a coincidere con la f.e.m. della batteria.

3) Il valore di regime della corrente rappresenta il valore a cui tende la corrente per tempi lunghi, quindi:

$$I_0 = \lim_{t\to+\infty} I(t) = \frac{\varepsilon}{R} = 0.3\ A$$

4) Quando l'interruttore viene portato in posizione B, escludendo la batteria, la seconda legge di Kirchhoff si modifica in:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = 0$$

La cui soluzione è:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.3e^{-2500t}$$

Avendo considerato come istante iniziale quello in cui le condizioni del circuito cambiano (in questo caso t=0 s quando si sposta l'interruttore).

L'istante di tempo t_1 per cui la corrente scende alla metà del valore iniziale si ricava ponendo al posto di I(t) il valore $I_0/2$ trovando:

$$I(t_1) = I_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{I_0}{2} \Leftrightarrow t_1 = \tau ln2 = 2.77\ 10^{-4} s$$

Esercizio 4

1) Per definizione la reattanza capacitiva è data da:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = 636.6\Omega$$

2) Analogamente la reattanza induttiva è data da:

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L = 0.314\ \Omega$$

Dai valori ottenuti si può notare come il circuito sia principalmente capacitivo, con un contributo minimo dell'induttore, pertanto il comportamento sarà simile a quello di un circuito RC in alternata.

3) Ricorrendo alla definizione di impedenza si ha:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 644.4\ \Omega$$

4) La corrente massima è data da:

$$I_{max} = \frac{\Delta V_{max}}{\mathrm{Z}} = \frac{\sqrt{2}\Delta V_{eff}}{\mathrm{Z}} = 0.483\ \mathrm{A}$$

5) La differenza di potenziale massima ai capi di ogni componente è legata alla corrente massima dalla rispettiva reattanza, pertanto:

$$\Delta V_{maxR} = RI_{max} = 48.3\ \mathrm{V}$$

$$\Delta V_{maxC} = X_C I_{max} = 307\ \mathrm{V}$$

$$\Delta V_{maxL} = X_L I_{max} = 0.152\ \mathrm{V}$$

6) L'angolo di fase tra tensione è corrente è dato da:

$$\phi = arctg\frac{X_L - X_C}{R} = -81.1°$$

Il segno ottenuto indica che la tensione è in ritardo di fase rispetto alla corrente, a causa della reattanza capacitiva maggiore di quella induttiva. Il fatto che il valore sia prossimo a -90° (valore che si sarebbe trovato in un circuito puramente capacitivo) è invece legato all'avere una reattanza capacitiva molto maggiore anche della resistenza del circuito, che indica che tra i tre componenti in serie quello che determina principalmente il comportamento del circuito è il condensatore.