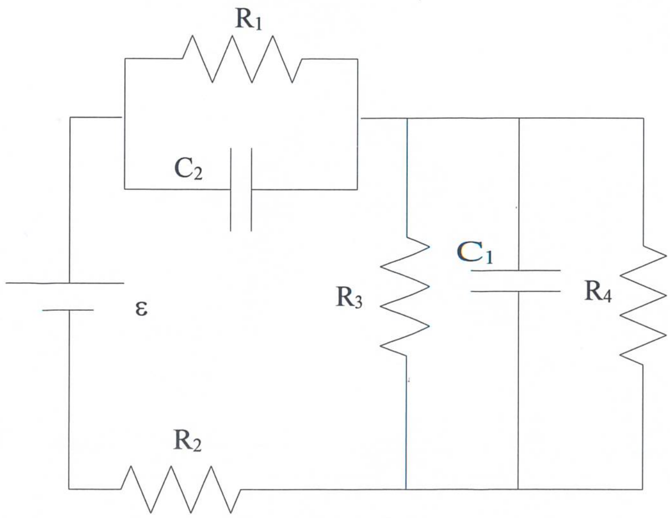
Università del Salento
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Industriale
Appello di **FISICA GENERALE 2** del 24/06/21

Esercizio 1 (9 punti): Una sbarretta rettilinea di lunghezza L=1.00 m, isolante, è uniformemente carica con carica totale Q= 2.00 C. Si determinino:
1) Il campo elettrico lungo l'asse della sbarretta;
2) Il potenziale elettrico lungo l'asse della sbarretta, assumendo V=0 V a distanza infinita.

Esercizio 2 (9 punti): Il circuito in figura opera in condizioni stazionarie. Si determinino:
1) La corrente in ogni ramo.
2) La carica accumulata su ogni condensatore.
3) L'energia accumulata in ogni condensatore.
4) La potenza dissipata da ogni resistenza.
R_1=10.0 Ω, R_2=30.0 Ω, R_3= R_4=20.0 Ω, C_1=4.0 pF, C_2=10.0 pF, ε=10.0V



Esercizio 3 (9 punti): Un protone entra con velocità orizzontale di modulo v=4.50 10^6ms^{-1} nella regione tra due armature orizzontali, a distanza d=2.00 cm, tra cui è applicata una differenza di potenziale di ΔV=15.0 V. Supponendo che l'armatura superiore sia a potenziale maggiore e che il protone entri nella regione tra le armature alla stessa quota dell'armatura superiore, e trascurando la forza peso, si determini:
1) La forza agente sul protone (modulo, direzione e verso);
2) La distanza percorsa in orizzontale dal protone prima di cadere sull'armatura inferiore;
3) Il tempo impiegato dal protone per cadere sull'armatura inferiore.

Esercizio 4 (9 punti): Su una sbarretta rettilinea di lunghezza L=20.0 cm e massa M=1.00 kg scorre senza attrito su due rotaie di resistenza trascurabile, inclinate di 30° rispetto all'orizzontale e collegate da un filo di resistenza trascurabile. Il circuito è inserito in un campo magnetico uniforme, verticale verso l'alto, di modulo B= 0.250 T. Sapendo che la resistenza della sbarretta è R=10 Ω e che la sbarretta è inizialmente in quiete si determinino:
1) La forza elettromotrice indotta a causa del moto della sbarretta;
2) La forza magnetica agente sulla sbarretta;
3) La legge oraria del moto;
4) La velocità limite della sbarretta.

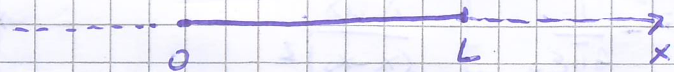
Teoria 1 (3 punti): Utilizzando la legge di Ampere si determini il campo magnetico generato da un solenoide infinito, attraversato da corrente i e composto da n spire per unità di lunghezza.

Teoria 2 (3 punti): Dato un dipolo elettrico $\vec{p}$ posto in un campo elettrico uniforme $\vec{E}$ si dimostri che il dipolo risente di una forza totale nulla, di un momento meccanico $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$, e che l'energia di interazione tra dipolo e campo vale $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

a)

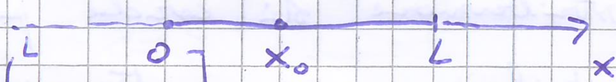


Nel riferimento in Figura e dividendo la distribuzione in elementi di lunghezza infinitesima dx, ogni elemento infinitesimo genererà un campo orientato lungo l'asse x e verso destra se l'elemento è a sinistra del punto in cui si calcola il campo (verso sinistra in caso contrario).

Calcoliamo ora il campo totale nel punto con ascissa x_0.

Iniziamo dal considerare il caso in cui il punto sia all'interno della sbarretta $(0 \leq x_0 < L)$

$$\vec{E}(x_0) = E_x(x_0)\,\hat{x}$$



$$E_x(x_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{x_0-\varepsilon}\frac{\lambda\,dx}{(x-x_0)^2} - \int_{x_0+\varepsilon}^{L}\frac{\lambda\,dx}{(x-x_0)^2}\right] \qquad \lambda = \frac{Q}{L}$$

Dove il primo integrale rappresenta il campo generato da tutti i punti a sinistra di x_0 e il secondo quello dei punti a destra. Il limite è dovuto alla divergenza in $x = x_0$ della funzione integranda.

$$E_x(x_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\lambda\left[-\frac{1}{x-x_0}\right]_0^{x_0-\varepsilon} - \lambda\left[-\frac{1}{x-x_0}\right]_{x_0+\varepsilon}^{L}\right] =$$

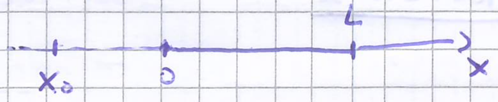
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\lambda\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x_0}\right) - \lambda\left(-\frac{1}{L-x_0} + \frac{1}{x_0+\varepsilon-x_0}\right)\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\cancel{\frac{1}{\varepsilon}} - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{L-x_0} - \cancel{\frac{1}{\varepsilon}}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L-x_0} - \frac{1}{x_0}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x_0-(L-x_0)}{x_0(L-x_0)}\right) = \frac{Q}{L}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2x_0-L}{x_0(L-x_0)}\right)$$

All'esterno il calcolo è più semplice.

Se $x_0 < 0$ si ha



$$E_x(x_0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda\,dx}{(x-x_0)^2} =$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x-x_0}\right]_0^L = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{L-x_0}+\frac{1}{0-x_0}\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{L-x_0}+\frac{1}{x_0}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\frac{L}{x_0(L-x_0)}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_0(L-x_0)}$$

Se $x_0 > L$ cambia semplicemente il segno

$$E_x(x_0) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{1}{x_0(L-x_0)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_0(x_0-L)}$$

Per determinare il potenziale si può nuovamente considerare la distribuzione di cariche pu infinitesime, ognuna delle quali contribuisce con un termine $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$, pertanto:

$x_0 < 0$

$$V(x_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda\,dx}{x-x_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\log\frac{L-x_0}{-x_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\log\left(1-\frac{L}{x_0}\right)$$

$0 \le x_0 < L$

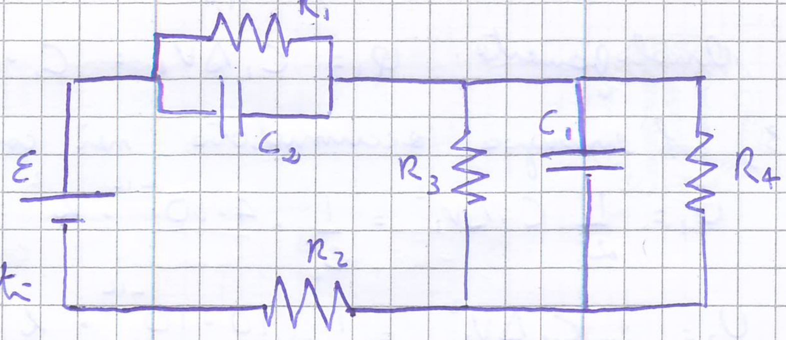
$$V(x_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{x_0-\varepsilon}\frac{\lambda\,dx}{x_0-x}+\int_{x_0+\varepsilon}^{L}\frac{\lambda\,dx}{x-x_0}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log(L-x_0)+\right.$$

$$\left.+\log x_0 - 2\log\varepsilon\right] = +\infty$$

$x_0 > L$

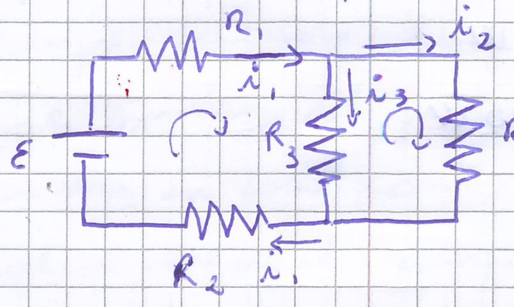
$$V(x_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda\,dx}{x_0-x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\log\left(1-\frac{L}{x_0}\right)$$

Esercizio 2



1) In condizioni stazionarie i rami in cui si trovano i condensatori non sono attraversati da corrente.

Il circuito è equivalente a:



Dalle leggi di Kirchhoff si ha:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ \mathcal{E}_1 - R_1 i_1 - R_3 i_3 - R_2 i_1 = 0 \\ -R_4 i_2 + R_3 i_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} i_3 = \dfrac{R_4}{R_3} i_2 \\ i_1 = \left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right) i_2 \\ \mathcal{E}_1 - (R_1 + R_2)\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right) i_2 - R_4 i_2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} i_2 = \dfrac{\mathcal{E}_1}{(R_1+R_2)\left(1+\dfrac{R_4}{R_3}\right) + R_4} = \dfrac{10}{(10+30)\left(1+\dfrac{20}{20}\right) + 20} = 0.100 \text{ A} \\ i_3 = \dfrac{20}{20} \cdot 0.100 = 0.100 \text{ A} \\ i_1 = \left(1 + \dfrac{20}{20}\right) \cdot 0.100 = 0.200 \text{ A} \end{cases}$$

2) La carica sui condensatori si calcola da $Q = C\Delta V$, con ΔV differenza di potenziale ai capi del condensatori.

$Q_2 = C_2 \Delta V_2 = C_2 \cdot R_1 i_1 =$ (C_2 è in parallelo a R_1)

$= 10 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 0.2 = 2 \cdot 10^{-10}$ C

Analogamente $Q_1 = C_1 \Delta V_1 = C_1 \cdot R_3 i_3 = 4 \cdot 10^{-12} \cdot 20 \cdot 0.1 = 8 \cdot 10^{-12}$ C

3) L'energia accumulata nei condensatori è:

$U_1 = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot 2^2 = 4.00 \; 10^{-12}$ J

$U_2 = \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 2^2 = 2.00 \; 10^{-11}$ J

4) Le potenze dissipate sono:

$P_1 = R_1 i_1^2 = 10 \cdot (2 \; 10^{-1})^2 = 0.400$ W

$P_3 = P_4 = R_3 i_3^2 = 20 \cdot (10^{-1})^2 = 0.200$ W

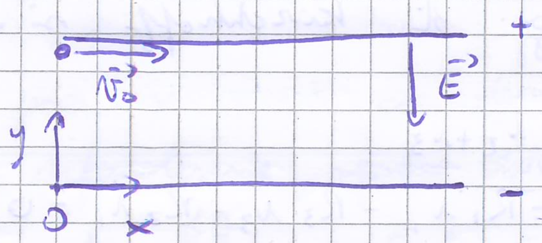
$P_2 = R_2 i_1^2 = 20 \cdot (2 \; 10^{-1})^2 = 0.800$ W

ESERCIZIO 3

Ricordiamo innanzitutto che un protone ha carica

$q = 1.60 \; 10^{-19}$ C e massa

$m = 1.67 \; 10^{-27}$ kg



Il campo elettrico tra le armature (trascurando gli effetti ai bordi) è uniforme, verticale verso il basso e ha modulo

$E = \frac{\Delta V}{d}$

1) La forza agente sul protone è

$\vec{F} = q\vec{E} = -q \frac{\Delta V}{d} \hat{y} \Rightarrow F = q \frac{\Delta V}{d} = \frac{1.6 \; 10^{-19} \cdot 15}{2 \cdot 10^{-2}} =$

$= 1.20 \; 10^{-16}$ N

2) Da $\vec{F} = m\vec{a}$ si ha immediatamente che l'accelerazione è verticale verso il basso e costante, pertanto la legge oraria del moto è:

$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = d + \frac{a_y}{2} t^2 \end{cases}$$

con $a_y = -\frac{F}{m} = -\frac{1.2 \; 10^{-16}}{1.67 \; 10^{-27}} = -7.19 \; 10^{10}$ m/s²

Il tempo t_F necessario per raggiungere l'armatura inferiore si ottiene da

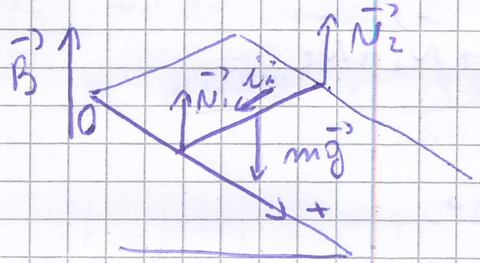
$$y(t_F) = 0 \iff d + \frac{a_y}{2} t_F^2 = 0 \iff t_F = \sqrt{-\frac{2d}{a_y}} =$$

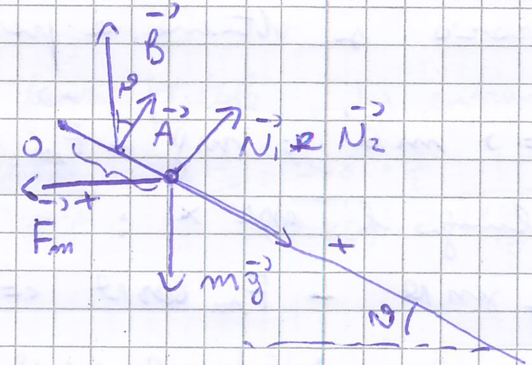
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,10^{-2}}{7.19\;10^{10}}} = 7.46\;10^{-7}\ \text{s}$$

Da cui

$$x(t_F) = v_{0x}\, t_F = 4.5\;10^{6} \cdot 7.46\;10^{-7} = 3.36\ \text{m}$$

ESERCIZIO 4





Prima di effettuare calcoli descriviamo qualitativamente cosa succede. All'istante iniziale la sbarretta, che costituisce il lato mobile di una spira rettangolare, è in quiete ($\vec{v_0} = \vec{0}$). La sbarretta verrà messa in movimento inizialmente dalla componente della forza peso lungo la direzione delle rotaie acquistando velocità. A causa del moto della sbarretta l'area della spira cambia, causando una variazione di flusso del campo magnetico e, per la legge di Faraday, l'induzione di una forza elettromotrice. Quest'ultima causa il passaggio di corrente e, infine, una forza magnetica che a sua volta influenza il moto.

Per passare all'analisi quantitativa consideriamo un istante in cui la posizione della sbarretta è x (vedi Figura).

Il flusso del campo magnetico è:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = B A \cos\theta = B L x \cos\theta$$

Pertanto

1) $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BLx\cos\vartheta) = -BL\cos\vartheta\frac{dx}{dt} = -BLv_x\cos\vartheta$

Il segno - indica che il verso della corrente è opposto a quello che rispetta la regola della mano destra con $\vec{A}$ e, pertanto, è orario (guardando dall'alto, vedi Figura sinistra)

2) La forza magnetica è

$\vec{F}_m = i_i\,\vec{L}\times\vec{B} \Rightarrow |\vec{F}_m| = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R}LB$ orientata come in Figura

3) La legge oraria si ottiene a partire da

$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_m + \vec{N}_1 + \vec{N}_2$

Proiettando lungo l'asse x :

$ma_x = mg\,\text{sen}\,\vartheta - F_m\cos\vartheta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_x = g\,\text{sen}\,\vartheta - \frac{1}{m}\frac{|\mathcal{E}_i|}{R}LB\cos\vartheta = g\,\text{sen}\,\vartheta - \frac{B^2L^2\cos^2\vartheta}{mR}v_x$

Posto $A = \frac{B^2L^2\cos^2\vartheta}{mR}$ si ha

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = g\,\text{sen}\,\vartheta - Av_x$ da cui

$\frac{dv_x}{g\,\text{sen}\,\vartheta - Av_x} = dt \Leftrightarrow \int_0^{v_x(t)}\frac{dv_x}{g\,\text{sen}\,\vartheta - Av_x} = \int_0^t dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{A}\int_0^{v_x(t)} -A\frac{dv_x}{g\,\text{sen}\,\vartheta - Av_x} = \int_0^t dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{A}\Big[\log(g\,\text{sen}\,\vartheta - Av_x)\Big]_0^{v_x(t)} = t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\frac{g\,\text{sen}\,\vartheta - Av_x(t)}{g\,\text{sen}\,\vartheta} = -At \Leftrightarrow 1 - \frac{A}{g\,\text{sen}\,\vartheta}v_x = e^{-At} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_x(t) = \frac{g\,\text{sen}\,\vartheta}{A}\left(1 - e^{-At}\right)$

La legge oraria si ottiene da

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_x(t)\, dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - x_0 = \int_0^t \frac{g \operatorname{sen}\vartheta}{A}\left(1 - e^{-At}\right) dt = \int_0^t \frac{g \operatorname{sen}\vartheta}{A}\, dt - \int_0^t \frac{g \operatorname{sen}\vartheta}{A} e^{-At}\, dt =$$

$$= \frac{g \operatorname{sen}\vartheta}{A} t + \frac{g \operatorname{sen}\vartheta}{A}\left(e^{-At} - 1\right)$$

4) La velocità limite si può ottenere come $\lim_{t \to +\infty} v_x(t)$ o, più semplicemente, cercando il valore di v_x che rende nulla la forza totale. In entrambi i casi si ottiene

$$v_{x\,lim} = \frac{g \operatorname{sen}\vartheta}{A} = \frac{g \operatorname{sen}\vartheta}{B^2 L^2 \cos^2\vartheta}\, mR = \frac{9.81 \cdot \frac{1}{2}}{(0.25)^2 \cdot 0.2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot 1 \cdot 10 = 5.23\ ms^{-1}$$