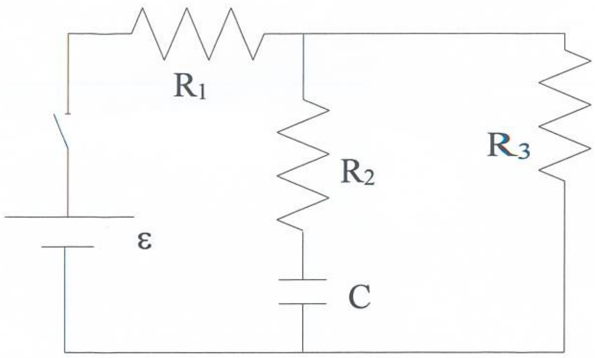
Università del Salento
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Industriale
Appello di **FISICA GENERALE 2** del 10/09/21

Esercizio 1 (9 punti): Un lastra dielettrica infinita di spessore D=20.0 cm ha una densità volumetrica di carica dipendente dalla distanza dal centro tramite l'equazione $\rho = Ad^3$ con A=2.00 Cm^{-6}. Si determini il campo elettrico nei punti a distanza dal centro della distribuzione d=0.00 cm, r=10.0 cm, r=20.0 cm e r=40.0 cm.

Esercizio 2 (9 punti): Un circuito è costituito da un condensatore di capacità C=5.00 μF e un induttore di induttanza L=20.0 mH. Il condensatore è inizialmente carico con carica Q=25.0 μC.
Si determinino la dipendenza dal tempo:
1) della carica sulle armature;
2) della corrente nel circuito;
3) dell'energia accumulata nel condensatore;
4) dell'energia accumulata nel campo magnetico dell'induttore.
Si discuta infine la conservazione dell'energia nel circuito.

Esercizio 3 (9 punti): Nel circuito in figura l'interruttore è inizialmente aperto e il condensatore scarico. Si determinino:
1) La dipendenza dal tempo delle correnti;
2) Il valore massimo della carica nel condensatore.

R_1=10.0 Ω, R_2=20.0 Ω, R_3= 50.0 Ω, C=50.0 pF, ε=12.0V



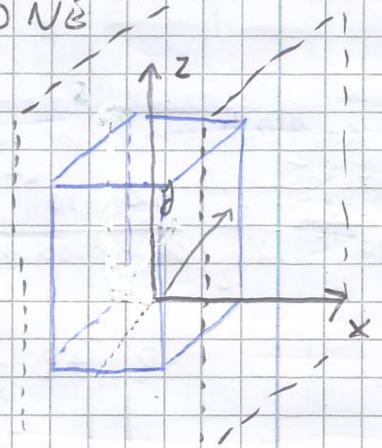
Esercizio 4 (9 punti): Un conduttore cilindrico rettilineo e infinito, di raggio R=10.0 cm, è percorso da corrente con densità uniforme, di modulo J=10 A/m^2 e parallela all'asse del cilindro. Applicando opportunamente la Legge di Ampere si determini l'espressione del campo magnetico in un punto qualsiasi.

Teoria 1 (3 punti): Si verifichi la Legge di Gauss per una carica puntiforme Q posta al centro di una superficie di integrazione sferica di raggio R.

Teoria 2 (3 punti): Si determini l'espressione della capacità equivalente di due condensatori in serie.

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1



$\rho = A d^3$

$A = 2.00\ C\,m^{-6}$

$D = 20.0\ cm$

$d = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Data la simmetria della distribuzione di carica (invariante per traslazioni lungo y e z nel riferimento in figura) il campo elettrico è diretto lungo l'asse x e dipende solo dalla x.

Il campo può essere determinato applicando la legge di Gauss, applicata alla superficie laterale di un parallelepipedo con facce parallele ai piani cartesiani e simmetrico rispetto al piano xz (vedi figura). Inoltre per simmetria $E_x(x) = -E_x(-x)$

Iniziamo dal caso $x < \frac{D}{2}$

$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \iff$ il contributo al flusso è $\neq 0$ solo per le facce // al piano yz, di area indicata con S, su queste facce il campo è costante e parallelo e concorde a $d\vec{S}$) $\iff -E_x(-x) \cdot S + E_x(x) \cdot S = 2E_x(x) \cdot S =$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-x}^{x} S \cdot A|x|^3 dx = \frac{1}{\varepsilon_0} A \cdot S \left[\int_{-x}^{0} (-x)^3 dx + \int_0^x x^3 dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} A \cdot S \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{4}\right) = \frac{A S x^4}{2\varepsilon_0} \iff 2E_x(x) \cdot \cancel{S} = \frac{A \cancel{S} x^4}{2\varepsilon_0} \iff$$

$$\iff E_x(x) = \frac{A x^4}{4\varepsilon_0}$$

Se invece $x > \frac{D}{2}$ il calcolo del flusso resta uguale, mentre nel calcolo della carica interna gli estremi di integrazione diventano $-\frac{D}{2}$ e $\frac{D}{2}$

$$2E_x(x) \cdot \cancel{S} = \frac{A \cancel{S}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{D}{2}\right)^4 \iff E_x(x) = \frac{A D^4}{64\,\varepsilon_0}$$

Passando al calcolo nei quattro punti richiesti:

$x = 0 \Rightarrow E_x(x) = 0$

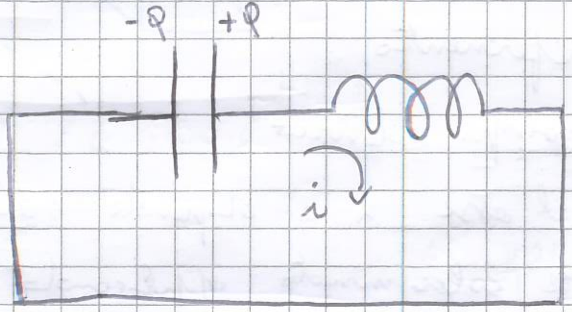
$x = 10.0$ cm è sul bordo della distribuzione. È immediato verificare che il campo è continuo e in questo punto vale $E_x(x) = 2 \cdot (10^{-1})^4 =$

$= 5.65\ 10^{6}\ \frac{N}{C}$

per $x = 20.0$ cm e $x = 40.0$ cm il campo è uguale e vale

$$E_x(x) = \frac{2\,(2\cdot 10^{-1})^4}{64\cdot 8.85\ 10^{-12}} = \frac{32\ 10^{-4}}{64\cdot 8.85\ 10^{-12}} = 5.65\ 10^{6}\ \frac{N}{C}$$

ESERCIZIO 2



1) Indichiamo con Q la carica sull'armatura destra e supponiamo sia inizialmente carica positivamente. Prendiamo come verso positivo della corrente quello orario e applichiamo la 2ª legge di Kirchhoff percorrendo il circuito in verso orario.

$$\frac{Q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad i = -\frac{dQ}{dt} \iff$$

$$\iff \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \iff \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC}$$

ponendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ la soluzione generale è:

$$Q(t) = A\,\mathrm{sin}(\omega_0 t + \varphi) = Q_0 \cos(\omega_0 t)$$

2) $i(t) = -\frac{dQ}{dt} = Q_0\,\omega_0\,\mathrm{sin}(\omega_0 t)$

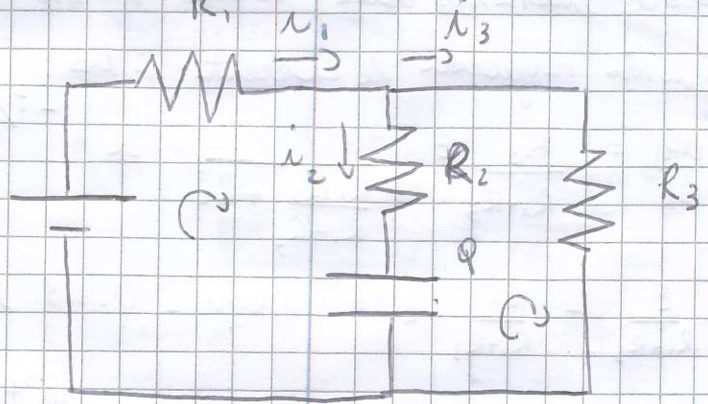
3) $U_C = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t)$

4) $U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega_0^2\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\cancel{L} Q_0^2 \frac{1}{\cancel{L}C}\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t) =$

$= \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t)$

L'energia totale del sistema è $U = U_C + U_L = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$, costante e pari al valore iniziale dell'energia accumulata nel condensatore.

ESERCIZIO 3



Applicando le leggi di Kirchhoff si ha:

$$\begin{cases} (1)\quad i_1 = i_2 + i_3 \\ (2)\quad -R_3 i_3 + R_2 i_2 + \dfrac{Q}{C} = 0 \\ (3)\quad \mathcal{E} - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0 \end{cases} \qquad e \quad i_2 = \frac{dQ}{dt}$$

Considerato che il processo di carica rende le correnti dipendenti dal tempo e che la carica sul condensatore è direttamente legata a i_2 conviene risolvere il sistema determinando per prima i_2

$$\begin{cases} (1)\quad i_1 = i_2 + i_3 \\ (3)\quad \mathcal{E} - R_1(i_2 + i_3) - R_3 i_3 = 0 \iff \mathcal{E} - R_1 i_2 - R_1 i_3 - R_3 i_3 = 0 \iff \\ \qquad \iff i_3 = \dfrac{\mathcal{E} - R_1 i_2}{R_1 + R_3} \\ (2)\quad -\dfrac{R_3}{R_1+R_3}(\mathcal{E} - R_1 i_2) + R_2 i_2 + \dfrac{Q}{C} = 0 \end{cases}$$

Sviluppando la (2) si ha:

$$-\frac{R_3}{R_1+R_3}\mathcal{E} + \left(\frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} + R_2\right) i_2 + \frac{Q}{C} = 0 \iff$$

$$\iff \underbrace{\left(\frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} + R_2\right)}_{A} \frac{dQ}{dt} = \underbrace{\frac{R_3}{R_1+R_3}\mathcal{E}}_{B} - \frac{Q}{C} \iff$$

$$\iff A\frac{dQ}{dt} = B - \frac{Q}{C} \iff A\frac{dQ}{B - \frac{Q}{C}} = dt \iff$$

$$\iff A\int_{Q_0}^{Q} \frac{dQ}{B - \frac{Q}{C}} = \int_0^t dt \iff -AC \log\frac{B - \frac{Q}{C}}{B} = t \iff$$

$$\iff \left(B - \frac{Q}{C}\right) = B e^{-\frac{t}{AC}} \iff Q = BC\left(1 - e^{-\frac{t}{AC}}\right) \iff$$

$$\iff Q(t) = \frac{R_3}{R_1+R_3}\mathcal{E} C\left(1 - e^{-\frac{t}{\left(\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_2\right)C}}\right) = 5.00\, 10^{-10}\left(1 - e^{\frac{t}{1.42}10^{9}}\right) \ (C)$$

Il valore massimo della carica si ottiene come $\lim_{t\to+\infty} Q(t) = 5.00\,10^{-10}\ C$

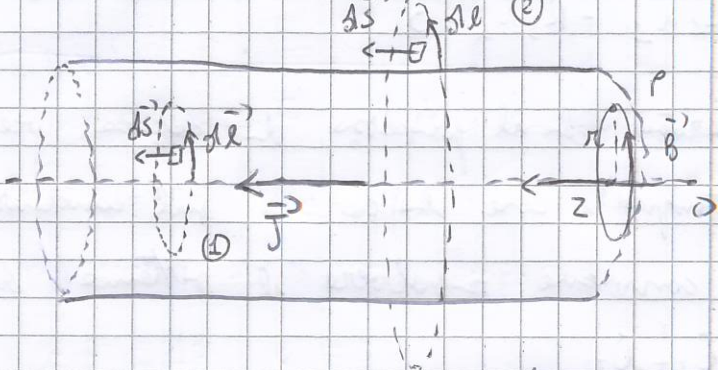
Per quanto riguarda le correnti si ha:

$$i_2 = \frac{dQ}{dt} = \frac{R_3}{R_1+R_3}\,\mathcal{E}\,\frac{1}{\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_2}\,e^{-t/\left(\left(\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_2\right)C\right)} = 0.708\,e^{-\frac{10^9 t}{1.42}}\ (A)$$

$$i_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_3} - \frac{R_1}{R_1+R_3}\,i_2 = 0.200 - 0.118\,e^{-\frac{10^9 t}{1.42}}\ (A)$$

$$i_1 = i_2+i_3 = 0.200 + 0.590\,e^{-\frac{10^9 t}{1.42}}$$

ESERCIZIO 4



Data la simmetria cilindrica della distribuzione è semplice dimostrare che le linee di campo sono circonferenze con centro sull'asse del cilindro e giacenti in piani perpendicolari all'asse. Il campo può essere calcolato applicando la legge di Ampère lungo una linea di campo:

$$\oint \vec B\cdot d\vec l = \mu_0\int_S \vec J\cdot d\vec S$$ dove il secondo integrale è calcolato sul cerchio che ha la linea di campo come contorno e i versi di $d\vec l$ e $d\vec S$ sono legati dalla regola della mano destra (vedi figura).

Consideriamo per primo il caso in cui la linea sia interna alla distribuzione (linea ① in figura)

$$\vec B(\vec r) = B_\varphi(r)\,\hat\varphi$$

$$\oint \vec B\cdot d\vec l = \oint B_\varphi(r)\,dl = B_\varphi(r)\,2\pi r = \mu_0\int_S \vec J\cdot d\vec S =$$

$$= \mu_0\int_S J\hat z\cdot dS\,\hat z = \mu_0\int J\,dS = \mu_0 J\pi r^2 \iff B_\varphi(r) = \frac{\mu_0}{2}Jr = 6.28\,10^{-6}\,r\ (T)$$

Quando $r > R$ (all'esterno della distribuzione) il primo integrale resta invariato, mentre al secondo contribuisce solo la sezione della distribuzione, di area πR^2, pertanto:

$$B_\varphi(r)\, 2\pi r = \mu_0 J \pi R^2 \iff B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 J R^2}{2r} = \frac{6.28\ 10^{-8}}{r} \quad (T)$$